



Olimpiada de matematică-Etapa locală, 2019

Barem de notare-Clasa a IX-a

1. A) Calculați partea întreagă a numărului $A = \sqrt{n^2 + 3n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 2}$, unde n este un număr natural.

B) Determinați valoarea minimă a expresiei $E = |2x + 3| + |5x - 1| + |3x + 2|$, unde x este număr real.

Soluție:

A) Avem $A^2 = 2n^2 + 2n + 3 + \sqrt{4n^4 + 8n^3 + 20n + 8}$ și cum pentru $n \geq 6$ avem $2n^2 + 2n - 1 < \sqrt{4n^4 + 8n^3 + 20n + 8} < 2n^2 + 2n$, deducem că $4n^2 + 4n + 2 < A^2 < 4n^2 + 4n + 3$ de unde obținem $2n + 1 < A < 2n + 2$. Deci $[A] = 2n + 1$. (2p)

Pentru $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ se obțin valorile $[A] = 2, [A] = 3, [A] = 5, [A] = 7, [A] = 9$, respectiv $[A] = 11$. (1p)

B) Avem $E = |2x + 3| + |5x - 1| + |3x + 2| = |2x + 3| + |3x + 2| + |1 - 5x| \geq |2x + 3 + 3x + 2 + 1 - 5x| = 6$ (3p)

Cum pentru $x=0$ avem $E=6$, deducem că valoarea minimă a lui E este 6.

(1p)

2. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a^3 + b^3 + c^3 = 8$.

Demonstrați că $\frac{1}{2014+ab} + \frac{1}{2014+bc} + \frac{1}{2014+ca} \geq \frac{3}{2018}$.

Soluție: Din relația $a^3 + b^3 + c^3 = 8$ deducem că $a^3 \leq 8, b^3 \leq 8, c^3 \leq 8$,

deci $a, b, c \leq 2$. (2p)

Utilizând CBS obținem $\frac{1}{2014+ab} + \frac{1}{2014+bc} + \frac{1}{2014+ca} \geq \frac{(1+1+1)^2}{2014+ab+2014+bc+2014+ca} =$
 $\frac{9}{6042+ab+ac+bc}$ (2p)

Rămâne să arătăm că $\frac{9}{6042+ab+ac+bc} \geq \frac{3}{2018} \leftrightarrow ab + ac + bc \leq 12$, relație evidentă din condițiile $a, b, c \leq 2$. (2p)

Egalitatea în ultima inegalitate are loc pentru $a=b=c=2$, însă aceste valori nu verifică condiția din ipoteză, deci egalitatea nu poate avea loc. (1p)

3. Fie mulțimea $A = \{3x + 5y, unde x, y \in \mathbb{Z}\}$. Aflați cardinalul mulțimii $\mathbb{Z} - A$.

Soluție:

Se arată prin inducție că $a \in A, \forall a \geq 1$ întreg. (3p)

Se arată prin inducție că $a \in A, \forall a \leq -1$ întreg. (2p) (variantă: dacă

$a \in A, \forall a \geq 1$ și $a = 3x + 5y$ atunci avem și $-a = 3(-x) + 5(-y) \in A$)

Se deduce $Z - A = \{0\}$, arătând prin reducere la absurd că nu există $x, y \in Z$ astfel încât $3x+5z=0$. (2p)

4. În triunghiul ABC bisectoarele AA', BB', CC' se intersectează în I. Știind că

$$\frac{IA}{IA'} + \frac{IB}{IB'} + \frac{IC}{IC'} = 6 \text{ să se arate că triunghiul ABC este echilateral.}$$

Soluție:

Avem $\frac{IA}{IA'} = \frac{b+c}{a}$, $\frac{IB}{IB'} = \frac{a+c}{b}$ și $\frac{IC}{IC'} = \frac{a+b}{c}$, relații care se deduc aplicând teorema bisectoarei. (3p)

Folosind ipoteza obținem $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} = 6$. Folosind inegalitatea

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ cu egalitate pentru $a=b$, deducem că relația e posibilă dacă și numai

dacă $a=b=c$, adică triunghiul este echilateral. (4p)

Timp de lucru 3 ore.