

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 25.02.2017
Clasa a XII-a

1. Se consideră a un număr real și funcția

$$f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos \frac{\pi(x-1)}{3}, & x \in [0, 1] \\ \frac{a}{x^2 - 4x + 7}, & x \in (1, 3] \end{cases}.$$

(3p) a) Arătați că f admite primitive pe $[0, 3]$ dacă și numai dacă $a = 4$.

(4p) b) Pentru $a = 4$ calculați $\int_0^3 f(x) dx$.

2. Se consideră H o parte stabilă a lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ și $r > 0$ un număr real. Arătați că:

(2p) a) dacă $H \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$, atunci $r = 1$;

(5p) b) dacă H este finită, atunci H este grup față de înmulțirea numerelor complexe.

3. Dacă $(G, \cdot)$ este un grup cu n elemente și e este elementul neutru al grupului, arătați că:

(4p) a) numărul elementelor $a \in G \setminus \{e\}$ cu proprietatea $a^2 \neq e$ este par;

(3p) b) dacă n este un număr par, atunci există $a \in G \setminus \{e\}$ astfel încât $a^2 = e$.

4. (7p) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt[n]{1+x} \cdot \ln(2+x) dx$.

GM 11/2016

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.