

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 16 februarie 2020
Clasa a VII-a

Barem de corectare

1) Fie numerele reale x și y , unde :

$$X = (-0,5)^3 + (-1)^4 + \frac{5}{2} \cdot \sqrt{0,0025} - \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \sqrt{5} \right) \cdot \sqrt{5}$$

$$\text{și } y = \frac{(0,75 - 1)^2 - 6,0625}{0,04 - \sqrt{4,1616}}$$

a) Calculați media aritmetică a numerelor x și y

b) Calculați numărul $n = x(x-y)^2(x^2y + x^2 + 1)$

Barem de notare:

a) Pentru $x = -\frac{1}{8} + 1 + \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{100} - 1 + 5$ 1 punct

Finalizare $x = 5$ 1 punct

Pentru $y = \frac{0,0625 - 6,0625}{0,04 - 2,04}$ 1 punct

Finalizare $y = 3$ 1 punct

Media aritmetică $\frac{x+y}{2} = 4$ 1 punct

b) Înlocuirea corectă a literelor x și y , $n = 5(5-3)^2(25 \cdot 3 + 25 + 1)$ 1 punct

Finalizare n=2020

1 punct

2) Se consideră numerele a și b,

$$a = \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + \dots + \sqrt{2020}$$

$$b = \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{9} + \dots + \sqrt{3030}$$

a) Calculați raportul dintre b și a.

b) Arătați că numărul $\frac{b^4 + a^4}{a^2 b^2}$ este mai mic decât 2,4

Barem de corectare:

a) Factor comun $\sqrt{2}$ și $a = \sqrt{2}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{1010})$ 1 punct

Factor comun $\sqrt{3}$ și $b = \sqrt{3}(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{1010})$ 1 punct

Raportul $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 1 punct

b) Descompunerea $\frac{b^4 + a^4}{a^2 b^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}$ 2 punct

Calculul : $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{13}{6}$ 1 punct

Compararea numerelor $\frac{13}{6}$ cu 2, 4 1 punct

3) Un ΔABC cu măsura $\angle A = 90^\circ$, este înscris într-un cerc de centru O și rază R are aria egală cu 600 cm^2 .

Calculați perimetrul ΔABC știind că înălțimea ΔABC corespunzătoare ipotenuzei și raza cercului sunt exprimate în cm prin două numere naturale consecutive.

Barem de notare

ΔABC , măsura $\angle A = 90^\circ$ înscris în cercul C (O, R) $\Rightarrow$ BC diametru, adică $BC = 2R$

$$OA=OB=OC=R \quad (1p)$$

Fie $AD \perp BC$, cum $AD < AO$, avem $AD=R-1$ (1p)

$$ARIE \Delta ABC = (AD * BC) / 2, \text{ de unde } (R-1)*R= 600 \quad (1p)$$

$$\text{Descompunerea lui } 600 = 24*25 \text{ si } R=25 \quad (1p)$$

$$\text{Din } \Delta ADO \text{ se afla } DO= 7\text{cm}, \text{ apoi } BD=18\text{cm} \quad (1p)$$

$$\text{Din } \Delta ADB \text{ } \angle D= 90^0 \text{ se afla } AB=30\text{cm} \quad (1p)$$

$$\text{Din } \Delta ABC \text{ sau } \Delta ADC \text{ se afla } AC=40 \text{ cm si finalizare perimetrul } \Delta ABC = 120 \text{ cm} \quad (1p)$$

4) Fie ΔABC , ascutitunghic. Bisectoarea $\angle ACB$, întâlnește înălțimea din B în M și mediatoarea laturii BC în N ($M \neq N$). Dacă P este punctul de intersecție al înălțimii cu mediatoarea, atunci:

a) Determinați natura ΔMNP ;

b) Dacă $BC = 1 \text{ cm}$ și $\angle ACB = 30^0$, determinați perimetrul patrulaterului $EFCE$ și natura lui (E și F sunt picioarele înălțimii, respectiv mediatoarei).

Barem de notare

a) În ΔCFN , $\angle FNC = 90^0 - \angle FCN$;

În ΔCEM , $\angle EMN = 90^0 - \angle ECM$; (1p)

$$\angle FCN \equiv \angle ECM$$

$$\angle FNC \equiv \angle PNM \text{ (opus la varf)} \quad (1p)$$

$$\Rightarrow \angle PNM \equiv \angle EMN$$

$$\Rightarrow \Delta PMN \text{ isoscel} \quad (1p)$$

$$b) \angle BCM = \angle MCE = 15^\circ$$

$$\angle FNC = \angle PNM = \angle PMN = 75^\circ$$

$$\angle FNM = 105^\circ$$

$$\angle BMN = 105^\circ$$

$$\angle PBC = 60^\circ \text{ (1p) } \textcircled{1}$$

$$P \text{ aparține mediatoarei } [BC] \Rightarrow PB = PC \text{ (1p) } \textcircled{2}$$

$$\text{Din relațiile } \textcircled{1} \text{ și } \textcircled{2} \Rightarrow \triangle PBC \text{ echilateral} \quad \text{(1p)}$$

In $\triangle PBC$ echilateral, $[CE]$ bisectoare $\angle PCB \Rightarrow E$ mijlocul BP $\Rightarrow EF$ linie mijlocie
 $\triangle PBC \Rightarrow$ }
F mijlocul BC

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow EF \parallel PC \\ EF = (PC/2) \end{array} \right\} \Rightarrow EFCP \text{ trapez isoscel}$$

$$EP = FC$$

$$\text{perimetrul } EFCP = 5/2 \quad \text{(1p)}$$