

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 8 februarie 2020

Clasa a X-a

BAREM

1. Să se rezolve ecuația: $\sqrt{1-x^2} = 3x - 4x^3$.		
1.	Condiții: $1 - x^2 \geq 0$; $3x - 4x^3 \geq 0$	(1p)
	Prin ridicare la pătrat obținem: $1 - x^2 = 9x^2 + 16x^6 - 24x^4 \Rightarrow 16x^6 - 24x^4 + 10x^2 - 1 = 0$	(1p)
	Notăm $x^2 = t \geq 0 \Rightarrow 16t^3 - 24t^2 + 10t - 1 = 0$	(1p)
	Obținem $t_1 = \frac{1}{2}$; $t_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$; $t_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$	(2p)
	Finalizare	(2p)
2. (a) Determinați numărul real m pentru care punctele A, B, C având afixele $z_1 = 1+i$, $z_2 = 4 \cdot i$, $z_3 = -1+m \cdot i$ sunt puncte coliniare. ($i^2 = -1$).		
(b) Arătați că, dacă $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, atunci $ z =1$ dacă și numai dacă există un număr real a astfel încât $z = \frac{1+ai}{1-ai}$.		
2.	(a) $m = 7$	(2p)
	(b) dacă $z = \frac{1+ai}{1-ai} \Rightarrow z = \frac{ 1+ai }{ 1-ai } = 1$	(2p)
	Reciproc, dacă $ z =1 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 1$, pentru $a = \frac{z-1}{i(z+1)}$, se obține $a = \bar{a} \Rightarrow a \in \mathbb{R}$, cu $z = \frac{1+ai}{1-ai}$	(3p)

3. Arătați că		
$\frac{1}{\log_{a_1} a_2} + \frac{1}{\log_{a_2} a_3} + \dots + \frac{1}{\log_{a_n} a_1} \geq n, (\forall) a_1, a_2, \dots, a_n \in (1, \infty)$		
	scrie $\frac{\lg a_1}{\lg a_2} + \frac{\lg a_2}{\lg a_3} + \dots + \frac{\lg a_n}{\lg a_1} \geq n$	(2p)
	scrie ineg. med. $m_a \geq m_g \Rightarrow$	

	$\frac{\lg a_1}{\lg a_2} + \frac{\lg a_2}{\lg a_3} + \dots + \frac{\lg a_n}{\lg a_1} \geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{\lg a_1}{\lg a_2} \cdot \frac{\lg a_2}{\lg a_3} \cdot \dots \cdot \frac{\lg a_n}{\lg a_1}}$	(4p)
	finalizare	(1p)
4. Se consideră mulțimea M a funcțiilor injective $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x) \cdot f(1-x) = f(ax+b)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, unde a și b sunt numere reale. Arătați că: (a) $a = 0$; (b) $f(1-b) = 1$; (c) f nu este surjectivă; (d) $M \neq \emptyset$.		
	(a) Pentru $x = 0$, apoi $x = 1 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) = f(1) f(0) = f(a) = f(a+b) \Rightarrow a = 0$	(2p)
	(b) $f(x) \cdot f(1-x) = f(ax+b)$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(b) \cdot f(1-b) = f(b)$ Presupunând că $f(b) = 0$ avem că $f(x) \cdot f(1-x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$ cu $f(x_1) = f(x_2)$, contradicție cu injectivitatea $\Rightarrow f(b) \neq 0 \Rightarrow f(1-b) = 0$	(2p)
	(c) Dacă $\exists t \in \mathbb{R}$ cu $f(t) = 0$ atunci $f(t) \cdot f(1-t) = f(b) \Rightarrow f(b) = 0$, fals Așadar, $0 \notin \text{Im } f$ deci f nu e surjectivă	(2p)
	(d) Un exemplu: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x$	(1p)

Barem – clasa a X-a