

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
17 februarie 2019
CLASA a VIII-a

1. Se consideră expresia $E(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$, cu x număr real.

a) (2p) Arătați că $E(x) + 1 = (x^2 - 5x + 5)^2$, pentru orice x număr real.

b) (5p) Demonstrați că $E(n)$ este divizibil cu 24, pentru orice n număr întreg.

2. a) (2p) Arătați că pentru orice numere reale $x, y, z > 0$ este adevărată relația $x^2y + z \geq 2x\sqrt{yz}$.

b) (5p) Demonstrați că $\frac{x}{x^2y + z} + \frac{y}{y^2z + x} + \frac{z}{z^2x + y} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$, oricare ar fi numerele reale $x, y, z > 0$.

3. În vârful A al pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara AP . Dacă M este piciorul perpendicularei din B pe PC și $AP = AB = a$, să se determine:

a) (5p) măsura unghiului format de dreapta BM cu planul (POM) , unde O este centrul pătratului $ABCD$;

b) (2p) distanța dintre dreptele PC și BD .

4. (7p) Fie $ABCD$ un patrulater convex și $M \notin (ABCD)$ astfel încât $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle BMC \equiv \sphericalangle CMD$ și $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle MCD$. Se consideră punctele $P \in MB$, $Q \in MC$ astfel încât $AP + PC$ și $BQ + QD$ să fie minime. Arătați că $PQ \parallel (ABCD)$.

Notă:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.