

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN GORJ
OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ , CLASA a X - a
22 FEBRUARIE 2014

1. a) Să se demonstreze că $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$ pentru orice numere $a, b, c > 0$.
- b) Fie numerele $a, b, c > 0$ astfel încât $3^{\frac{a+b}{c}} + 3^{\frac{b+c}{a}} + 3^{\frac{c+a}{b}} = 27$. Să se arate că $a = b = c$.

Supliment G.M. 12/2013

2. a) Să se arate că numărul $\log_2 3$ este irațional.
- b) Să se determine $a > 0$ astfel încât numerele $\log_2 a$ și $\log_3 a$ să fie raționale.
- c) Există oare două numere iraționale a și b astfel încât numărul a^b să fie rațional?
Justificare.

3. a) Fie z un număr complex astfel încât z^2 să fie număr real pozitiv. Atunci z este număr real.
- b) Se consideră numerele complexe z_1, z_2, z_3 astfel încât $|z_1 - z_2| = 1, |z_2 - z_3| = \sqrt{2}$ și $|z_3 - z_1| = \sqrt{3}$. Să se arate că $|z_1 - 2z_2 + z_3| = \sqrt{3}$.

4. Spunem că două funcții $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ au proprietatea (P) dacă $f(n) + g(n) = 2n$ pentru orice număr natural n .
- a) Să se arate că dacă două funcții injective $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ au proprietatea (P) atunci $f = g = id_{\mathbb{N}}$.
- b) Să se dea exemplu de două funcții surjective $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ cu proprietatea (P) astfel încât $f \neq id_{\mathbb{N}}$ și $g \neq id_{\mathbb{N}}$.
- (Prin $id_{\mathbb{N}}$ se înțelege funcția $id_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, id_{\mathbb{N}}(n) = n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$)

Subiecte propuse de prof. Constantinescu
Mircea

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 7 la 0.