

MATEMATIKA OLIMPIÁSZ

KÖRZETI SZAKASZ

2014. február 23.

XI. OSZTÁLY

M1- es program

1.) Igazold, hogy
$$\begin{vmatrix} 1! & 2! & 3! & \dots & n! \\ 2! & 2! & 3! & \dots & n! \\ 3! & 3! & 3! & \dots & n! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n! & n! & n! & \dots & n! \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} (n-1)! (1! \cdot 2! \cdot 3! \dots n!), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

2.) a.) Adott az $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ mátrix és $X = A^4 + 5A^2 + 4I_2$. Számítsd ki az X mátrix determinánsát!

b.) Igazold, hogy bármely $A \in M_n(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ esetén az $X = A^4 + 5A^2 + 4I_n$ mátrix determinánsa egy nemnegatív valós szám!

3.) Adott az $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = a + n + 1 - \sum_{k=1}^n \frac{k^4 + k^2 + 1}{k^4 + k}$, $a \in \mathbb{R}$ számsorozat.

a.) Igazold, hogy ez a sorozat konvergens!

b.) Határozd meg n rangját amelyre $|a_n - a| \leq 0,01$.

4.) a.) Létezik olyan $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozat amely teljesíti az $x_{n+1} - x_n + x_n^2 = 0, \forall n \in \mathbb{N}, x_{2014} = 1$ és $x_0 \in \mathbb{R}$ követelményeket?

b.) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(C_n^2 \pi)$ határértékeket!

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.