

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 9 februarie 2024

Clasa a XI-a

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietăţile: $\det(A) = 0$ şi $\det(A+I_2) = 1$. Demonstraţi:

(a) $A^2 = O_2$.

(b) $\det(A + kI_2)$ este pătrat perfect, pentru oricare $k \in \mathbb{Z}$.

Ovidiu Pop

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ astfel încât $X^{2023} = A$.

(a) Demonstraţi că $AX = XA$.

(b) Determinaţi matricea X .

Gazeta Matematică, enunţ modificat

3. (a) Demonstraţi că $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{2}$.

(b) Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin

$$x_n = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x)(1 - \sin^3 x) \cdot \dots \cdot (1 - \sin^n x)}{\cos^{2n} x}, \quad n \geq 1.$$

Demonstraţi că şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este divergent.

4. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un şir de numere reale strict pozitive, cu proprietatea $a_{n+1} = 2^{-a_n}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{-x}$. Presupunem cunoscut faptul că ecuaţia $(f \circ f)(x) = x$ admite o soluţie unică $x_0 \in (0, 1)$. Demonstraţi că şirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Romeo Ilie

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.