



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală - 16.02.2019

Clasa a XI – a

PROBLEMA 1. Se consideră matricele $A \in M_3(\mathbb{R})$ și $C = A - A^t$.

- a) Să se demonstreze că $\det(C) = 0$;
- b) Să se arate că dacă $\text{tr}(A^2) = \text{tr}(A \cdot A^t)$, atunci $C = O_3$.

PROBLEMA 2. Fie matricele $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ și $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$. Să se demonstreze că dacă $\det(A + \varepsilon B) \in \mathbb{R}$, atunci $\det(A - B) = \det(A) - \det(B)$.

PROBLEMA 3. Fie șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ definite prin $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{\sqrt{n+1}}$, $n \geq 1$, respectiv $b_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

- a) Să se demonstreze că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;
- b) Să se demonstreze că $b_n > \sqrt{n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;
- c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_n}$.

PROBLEMA 4. Să se determine valorile lui $a \in \mathbb{N}$, pentru care șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin $x_n = \cos(\pi\sqrt{n^2 + an + 1})$, este convergent.

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.