

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10.02.2024

BAREM DE CORECTARE - Clasa a IX – a

PROBLEMA 1. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A . Să se arate că dacă D este proiecția punctului A pe BC , E este punctul de intersecție al bisectoarei unghiului $\widehat{BAC}$ cu BC , iar M este mijlocul ipotenuzei BC , atunci:

- a) $[AE]$ este bisectoarea unghiului $\widehat{MAD}$;
- b) $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 \overrightarrow{AD} + \left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right) \overrightarrow{AM}$.

Barem de corectare.

- a) Deoarece $m(\widehat{DAB}) = 90^\circ - m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = m(\widehat{CAM})$, și $[AE]$ este bisectoarea unghiului $\widehat{A}$, rezultă că $[AE]$ este și bisectoarea unghiului $\widehat{MAD}$ **(2p)**
- b) Așadar, $\frac{ED}{EM} = \frac{AD}{AM} = \frac{2bc}{a^2} = k$, **(2p)** de unde
- $$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{1+k} \overrightarrow{AD} + \frac{k}{1+k} \overrightarrow{AM} = \frac{a^2}{a^2+2bc} \overrightarrow{AD} + \frac{2bc}{a^2+2bc} \overrightarrow{AM} \dots\dots\dots \textbf{(2p)}$$
- $$= \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 \overrightarrow{AD} + \left(1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right) \overrightarrow{AM} \dots\dots\dots \textbf{(1p)}$$

PROBLEMA 2. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin $x_1 = \frac{1}{4}$ și

$$\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} = \frac{2}{n^2 + 2n}, \text{ pentru } n \geq 1.$$

- a) Să se determine termenul general al șirului;
- b) Să se arate că $\sum_{k=1}^n (2k+1) x_k < 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Barem de corectare.

- a) Se demonstrează prin inducție că $x_n = \frac{1}{n^2(n+1)^2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$; **(4p)**
- b) Folosind punctul a), avem $\sum_{k=1}^n (2k+1) x_k = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1$ **(3p)**

PROBLEMA 3. Să se rezolve ecuația $\left\{x + \frac{1}{6}\right\} + \left\{x + \frac{3}{6}\right\} + \left\{x + \frac{5}{6}\right\} = \frac{3(2x-1)}{2}$.

Notă. $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului a .

Barem de corectare. Ecuația se scrie echivalent $x + \frac{1}{6} + x + \frac{3}{6} + x + \frac{5}{6} - \left[x + \frac{1}{6}\right] - \left[x + \frac{3}{6}\right] - \left[x + \frac{5}{6}\right] = 3x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left[x + \frac{1}{6}\right] + \left[x + \frac{3}{6}\right] + \left[x + \frac{5}{6}\right] = 3 \dots\dots\dots (4p)$

Dar, cum din identitatea lui Hermite, $\left[x + \frac{1}{6}\right] + \left[x + \frac{3}{6}\right] + \left[x + \frac{5}{6}\right] = \left[3x + \frac{1}{2}\right], \dots\dots\dots (2p)$

ecuația devine $\left[3x + \frac{1}{2}\right] = 3$, de unde $x \in \left[\frac{5}{6}, \frac{7}{6}\right) \dots\dots\dots (1p)$

PROBLEMA 4. Să se arate că, dacă a , b și c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

Barem de corectare. Deoarece a , b și c sunt lungimile laturilor unui triunghi, numerele $x = b + c - a$, $y = a + c - b$ și $z = a + b - c$ sunt pozitive. (1p)

Dacă notăm cu E expresia din stânga, atunci

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} \right) \dots\dots\dots (3p)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z} \right) \right) \geq 3 \dots\dots\dots (3p)$$

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.