OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019

CLASA a XII-a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. **a)** Fie $(A,+,\cdot)$ un inel fără divizori ai lui zero şi $M=\{a_1,a_2,...,a_n\}\subseteq A$ care conține cel puțin un element diferit de 1, cu proprietatea că este parte stabilă față de operația „$\cdot$ “
Să se arate că: $a_1+a_2+...+a_n=0$.

b) Dați un exemplu de astfel de inel $(A,+,\cdot)$.

c) Dacă în ipoteză se pierde integritatea inelului, concluzia rămâne adevărată ?

2. a) Fie „$\cdot$ “ operaţie algebrică asociativă pe mulţimea nevidă G. Dacă sunt satisfăcute condiţiile : i) există $e_s\in G$ pentru care $e_s\cdot x=x$, *oricare* $x\in G$.

ii) pentru oricare $x\in G$ există $x'\in G$ astfel încât $x'\cdot x=e_s$

se arate că $(G,\cdot)$ este grup.

b) Fie A o mulţime infinită şi notăm $F=\{f \mid f:A\to A \textit{ funcţie injectivă}\}$.

i) Să se demonstreze că $(F,\circ)$ este monoid.

ii) Explicaţi motivul pentru care $(F,\circ)$ nu este grup.

3. Fie $\mathcal{F}=\{f:[0,1]\to[0,1]/f \textit{ continuă și } f(x)=1 \Leftrightarrow x=½\}$.

i) Arătați că $0<\int_0^1 f(x)dx<1$ pentru orice $f\in\mathcal{F}$.

ii) Demonstrați că $sup\left\{\int_0^1 f(x)dx \;/\; f\in\mathcal{F}\right\}=1$ si $inf\left\{\int_0^1 f(x)dx \;/\; f\in\mathcal{F}\right\}=0$.

4. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă cu $\int_0^1 f(x)dx=\frac{2^{2018}-1}{2018}$. Să se arate că există $a\in[0,1]$ cu $f(a)=(a+1)^{2017}$.