

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 22 februarie 2020

Subiect clasa a IX-a

PROBLEMA 1

(4p) a) Să se determine numerele $x, y, z, t \in (0, \infty)$ dacă $xy = zt = 1$ și

$$\sqrt{x+y+z+t}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} + \sqrt{1+z} + \sqrt{1+t}) = 8\sqrt{2}.$$

(3p) b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $[x] + \frac{1}{[x]} = \{x\} + \frac{1}{\{x\}}$.

(prin $[x]$ și $\{x\}$ s-a notat partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x)

PROBLEMA 2

Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem:

(4p) a) $\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} + \frac{\sqrt{n+2}}{n+3} + \dots + \frac{\sqrt{2n+2}}{2n+3} < \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \frac{1}{\sqrt{n+4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n+4}}.$

(3p) b) $\sqrt{1 \cdot 2} + \sqrt{2 \cdot 3} + \dots + \sqrt{n(n+1)} < \frac{n(n+2)}{2}.$

PROBLEMA 3

Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$. Determinați numărul tripletelor $(x; y; z) \in A \times A \times A$ cu proprietatea că $x < y < z$, iar x, y, z sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice cu rația număr natural.

PROBLEMA 4

În patrulaterul $ABCD$, fie O intersecția diagonalelor, iar M, P, Q pe (BD) , (AB) respectiv (DC) , astfel

încât $\frac{MB}{MD} = 4, \frac{AP}{PB} = 3, \frac{DQ}{QC} = \frac{5}{3}$. Notăm $\frac{OD}{OB} = k$ și $\frac{OC}{OA} = p$.

a) Să se arate că $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{8(p-1)}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{8(k-1)}\overrightarrow{BD}$.

b) Dacă vectorii $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OQ}$ și $\overrightarrow{CP}$ sunt coliniari, arătați că $ABCD$ este paralelogram.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Punctajul maxim acordat fiecărei probleme este de 7 puncte.