

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10.02.2024

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X – a

PROBLEMA 1. Să se arate că dacă u și v sunt două numere complexe, astfel încât $|u| = |v|$ și $2 \cdot |u + v| \geq |u + 3v|$, atunci $u = v$.

Barem de corectare. Evident, $u = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (1p)

Dacă $u, v \in \mathbb{C}^*$, atunci dacă notăm $z = \frac{u}{v}$, relațiile din enunț se scriu $|z| = 1$ și $2 \cdot |z + 1| \geq |z + 3|$.

Avem $2 \cdot |z + 1| \geq |z + 3| \Leftrightarrow 4 \cdot |z + 1|^2 \geq |z + 3|^2$ (2p)

sau, echivalent $4 \cdot (z + 1)(\overline{z + 1}) \geq (z + 3)(\overline{z + 3}) \Leftrightarrow 4(|z|^2 + (z + \bar{z}) + 1) \geq |z|^2 + 3(z + \bar{z}) + 9 \Leftrightarrow$

$4((z + \bar{z}) + 2) \geq 3(z + \bar{z}) + 10 \Leftrightarrow z + \bar{z} \geq 2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z \geq 1$ (3p)

de unde, deoarece $|z| = 1$, se obține că $z = 1$, adică $u = v$ (1p)

PROBLEMA 2. Să se arate că dacă $n \in \mathbb{N}^*$, iar $a, b, c \in (0, 1)$ sau $a, b, c \in (1, +\infty)$, atunci

$$\frac{1}{\log_a(bc^n)} + \frac{1}{\log_b(ca^n)} + \frac{1}{\log_c(ab^n)} \geq \frac{3}{n+1}.$$

Barem de corectare. Notăm $A = \log_x a$, $B = \log_x b$, $C = \log_x c$, unde $x \in (0, 1)$, dacă $a, b, c \in (0, 1)$ sau $x \in (1, +\infty)$, dacă $a, b, c \in (1, +\infty)$. Astfel $A, B, C > 0$ (1p)

Dacă notăm $E = \frac{1}{\log_a bc^n} + \frac{1}{\log_b ca^n} + \frac{1}{\log_c ab^n}$, atunci din inegalitatea lui Titu Andreescu obținem

$$E = \frac{A}{nC + B} + \frac{B}{nA + C} + \frac{C}{nB + A} \dots\dots\dots (3p)$$

$$= \frac{A^2}{nAC + AB} + \frac{B^2}{nAB + BC} + \frac{C^2}{nBC + AC} \geq \frac{(A + B + C)^2}{(n + 1)(AB + AC + BC)} \dots\dots\dots (2p)$$

$$= \frac{1}{n + 1} \left(\frac{A^2 + B^2 + C^2}{AB + AC + BC} + 2 \right) \geq \frac{3}{n + 1} \dots\dots\dots (1p)$$

PROBLEMA 3. Fie $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \{0\}$ și $f : M \rightarrow M$ o funcție bijectivă cu proprietatea că

$$f(x) + f^{-1}(x) = x, \quad \forall x \in M.$$

a) Să se arate că M este o mulțime simetrică și că funcția f este impară;

b) Să se dea un exemplu de funcție cu aceste proprietăți.

Notă. O mulțime $M \subseteq \mathbb{R}$ se numește simetrică, dacă are loc $x \in M \Leftrightarrow -x \in M$.

Barem de corectare.

- a) Fie $x \in M$. Din relația dată, înlocuind x cu $f(x)$, rezultă că $(f \circ f)(x) + x = f(x)$. . (2p)

Dar, cum $f(x) = x - f^{-1}(x)$, se obține că $(f \circ f)(x) + f^{-1}(x) = 0 \Rightarrow (f \circ f \circ f)(x) + x = 0 \Rightarrow -x = (f \circ f \circ f)(x) \in M$ (2p)

Din $(f \circ f \circ f)(x) = -x$ avem $(f \circ f \circ f \circ f)(x) = -f(x) \Rightarrow f((f \circ f \circ f)(x)) = -f(x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ (2p)

- b) De exemplu, funcția $f: M \rightarrow M$, unde $M = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$, definită prin

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	1	-3	0	3	-1	2

satisface cerințele problemei..... (1p)

PROBLEMA 4. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$, mijloacele M, N, P și Q ale segmentelor AB, BC, CD , respectiv AD și punctele E, F, G și H situate pe segmentele AN, BP, CQ , respectiv DM , astfel încât $\frac{EA}{EN} = \frac{FB}{FP} = \frac{GC}{GQ} = \frac{HD}{HM}$;

- a) Să se arate că $EFGH$ este paralelogram dacă și numai dacă $ABCD$ este paralelogram;
 b) Să se demonstreze că dacă diagonalele patrulaterului $ABCD$ sunt congruente și perpendiculare, atunci $EG \perp FH$.

Barem de corectare. Fie z_A afixul punctului A , z_B afixul punctului B , ș.a.m.d.

Cum M, N, P și Q sunt mijloacele segmentelor AB, BC, CD , respectiv AD , avem $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$, $z_N = \frac{z_B + z_C}{2}$, $z_P = \frac{z_C + z_D}{2}$, $z_Q = \frac{z_A + z_D}{2}$ (2p)

Dacă notăm $\frac{EA}{EN} = \frac{FB}{FP} = \frac{GC}{GQ} = \frac{HD}{HM} = k$, atunci $z_E = \frac{z_A + k \cdot z_N}{k + 1} = \frac{2z_A + k \cdot (z_B + z_C)}{2(k + 1)}$, respectiv $z_F = \frac{2z_B + k \cdot (z_C + z_D)}{2(k + 1)}$, $z_G = \frac{2z_C + k \cdot (z_A + z_D)}{2(k + 1)}$ și $z_H = \frac{2z_D + k \cdot (z_A + z_B)}{2(k + 1)}$. (2p)

- a) Folosind aceste relații, se demonstrează echivalența $z_E + z_G = z_F + z_H \Leftrightarrow z_A + z_C = z_B + z_D$, adică $EFGH$ este paralelogram dacă și numai dacă $ABCD$ este paralelogram..... (1p)

- b) Dacă diagonalele patrulaterului $ABCD$ sunt congruente și perpendiculare, atunci $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = \pm i$, de unde se obține că $\frac{z_E - z_G}{z_F - z_H} = \pm i$, adică $EG \perp FH$ (2p).

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.