



Barem – Clasa a X-a

$$1. \text{ a) } \begin{cases} x=0 \Rightarrow f(0)f(1)=f(2016) \\ x=1 \Rightarrow f(1)f(0)=f(a+2016) \end{cases} \Rightarrow f(2016)=f(a+2016) \Rightarrow a=0$$

$$\text{b) } x=2016 \Rightarrow f(2016)f(-2015)=f(2016) \Rightarrow f(2016)[f(-2015)-1]=0$$

Dacă $f(2016)=0 \Rightarrow f(x)f(1-x)=0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ există cel puțin două numere reale distincte pentru care f se anulează, deci contradicție cu injectivitatea funcției f .

Rămâne $f(-2015)=1$.

c) Demonstrăm că $0 \notin \text{Im } f$. Presupunem că $\exists t \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(t)=0$. Din relația dată rezultă $f(t)f(1-t)=f(2016) \Rightarrow f(2016)=0$, fals. Deci $0 \notin \text{Im } f$ și prin urmare f nu este surjectivă.

$$2. \text{ a) } \text{Aplicăm inegalitatea mediilor: } x-2+\frac{4}{\sqrt[4]{x-2}} \geq 5\sqrt[5]{(x-2)\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x-2}}\right)^4} = 5.$$

$$\text{b) } 8+\log_3\left(\frac{x}{x^3+54}\right) \geq 5 \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x}{x^3+54}\right) \geq -3 \Leftrightarrow \frac{x}{x^3+54} \geq \frac{1}{27}. \text{ Pentru}$$

$$x > 2 \Rightarrow (x+6)(x-3)^2 \leq 0. \text{ Egalitatea are loc pentru } x-2=\frac{1}{\sqrt[4]{x-2}} \Leftrightarrow x=3. \text{ Deci } x=3.$$

$$3. \text{ a) } \text{Din convexitatea funcției } f \text{ rezultă: } \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right) \geq \frac{1}{\cos\left(\frac{A+B+C}{6}\right)}, \text{ deci}$$

$$\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}} \geq 2\sqrt{3}.$$

$$\text{b) } bc \cdot \sin\frac{A}{2}+ca \cdot \sin\frac{B}{2}+ab \cdot \sin\frac{C}{2}=bc \cdot \sin A \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin A}+ac \cdot \sin B \frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin B}+ba \cdot \sin C \frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin C}$$

$$=S\left[\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right] \geq 2\sqrt{3} \cdot S.$$