OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ-VRANCEA

08.02.2020

BAREM DE EVALUARE

CLASA A XI-A

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, astfel încât $\det\left(A^2 - 2I_2\right) = 0$. Arătați că $A^2 = 2I_2$ și $\det A = -2$.

Soluție: $\det\left(A + \sqrt{2}I_2\right) \cdot \det\left(A - \sqrt{2}I_2\right) = 0$ **1p**

Caz 1 $\det\left(A + \sqrt{2}I_2\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a + \sqrt{2} & b \\ c & d + \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ad - bc + 2 + \sqrt{2}\left(a + d\right) = 0$ **1p**

De unde $\begin{cases} ad - bc = -2 \\ a + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \det A = -2$ și $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b\left(a + d\right) \\ c\left(a + d\right) & d^2 + bc \end{pmatrix} = 2I_2$ **2p**

Caz 2. $\det\left(A - \sqrt{2}I_2\right) = 0$, analog...**3p**

2. Matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ verifică relația $AB = 2A + 3B$. Să se arate că $rangA = rangB$ și că matricele $A - 3I_n, B - 2I_n$ sunt inversabile. (GM/2019)

Soluție: $A(B - 2I_n) = 3B \Rightarrow rangB = rang3B = rangA(B - 2I_n) \le rangA$ …………**2p**

Analog, $rangA = rang2A = rang(A - 3I_n)B \le rangB$ rezultă că rangurile sunt egale…**2p**

$AB = 2A + 3B \Leftrightarrow \left(A - 3I_n\right)\left(B - 2I_n\right) = 6I_n$ ……………………………………………**2p**

Cum $\det I_n = 1 \ne 0$, rezultă că $\det(A - 3I_n) \ne 0, \det(B - 2I_n) \ne 0$, deci sunt inversabile**1p**

3. Calculați limita $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln\left(ex\right) \cdot \ln\left(ex^2\right) \cdot \ldots \cdot \ln\left(ex^n\right) - 1}{x - 1}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție: Fie $L_n = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln\left(ex\right) \cdot \ln\left(ex^2\right) \cdot \ldots \cdot \ln\left(ex^n\right) - 1}{x - 1}$ **1p**

Atunci $L_n - L_{n-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(ex)\cdot\ln(ex^2)\cdot\ldots\cdot\ln(ex^{n-1})\left[\ln(ex^n)-1\right]}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x^n}{x-1} = n\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln\left[1+(x-1)\right]}{x-1} = n$, oricare ar fi $n \geq 2$ **2p**

$L_1 = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(ex)-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln\left[1+(x-1)\right]}{x-1} = 1$..**1p**

Obținem $L_n = \frac{n(n+1)}{2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ **3p**

4. Dacă $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt două funcții periodice cu proprietatea că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right) = 0$, arătați că $f(x) = g(x)$,oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Soluție:Fie $T_1 > 0, T_2 > 0$ perioadele celor două funcții, f, respectiv g **1p**

Avem

$0 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x+nT_1) - g(x+nT_1)\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x) - g(x+nT_1)\right) \Rightarrow f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x+nT_1)$.**2p**

Analog, arătăm că $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x+nT_2)$ **2p**

Deci, $0 = \lim\limits_{n\to\infty}[f(x+n(T_1+T_2)) - g(x+n(T_1+T_2))] = \lim\limits_{n\to\infty}[f(x+nT_2) - g(x+nT_1)] =$
$= g(x) - f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ **2p**