

$x * e = x \Leftrightarrow k + (x - k)^{\log_a(e-k)} = x \Leftrightarrow (x - k)^{\log_a(x-e)} = x - k \Leftrightarrow$
 $\log_a(x - k)[\log_a(e - k) - 1] = 0, \forall x \in G \Rightarrow \log_a(e - k) = 1 \Rightarrow e - k = a \Rightarrow$
 $e = k + a \in G = (k, \infty) \setminus \{k + 1\}, k > 0, a > 0, a \neq 1$ este elementul neutru în raport cu legea $*$.

.....1 punct

Elemente simetrizabile: $\forall x \in G, \exists x' \in G$ astfel încât $x * x' = x' * x = e$

$$x * x' = e \Leftrightarrow k + (x - k)^{\log_a(x'-k)} = k + a \Leftrightarrow \log_a(x' - k) \cdot \log_a(x - k) = 1 \Rightarrow$$

$$x' = k + a^{\frac{1}{\log_a(x-k)}} \in G = (k, \infty) \setminus \{k + 1\}, \forall x \in G \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

În concluzie $(G, *)$ este grup abelian.....0,5 puncte

$$b) \quad x = x', x \in G \Rightarrow x = k + a^{\frac{1}{\log_a(x-k)}} \Leftrightarrow x - k = a^{\frac{1}{\log_a(x-k)}} \Leftrightarrow [\log_a(x - k)]^2 = 1$$

$$\text{Dacă } \log_a(x - k) = 1 \Rightarrow x = k + a \in G, \text{ iar din } \log_a(x - k) = -1 \Rightarrow x = k + \frac{1}{a} \in G$$

sunt cele două elemente din G care verifică cerința.....0,5 puncte

c) Fie funcția $f: \mathbf{R}^* \rightarrow G, f(x) = k + a^x, a > 0, a \neq 1$.

$$f \text{ este izomorfism de grupuri} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ bijectivă} \Leftrightarrow \text{injectivă} + \text{surjectivă} \\ f \text{ morfism: } f(x \cdot y) = f(x) * f(y), \forall x, y \in \mathbf{R}^* \end{cases} \dots\dots\dots 1,5 \text{ puncte}$$

PROBLEMA 2

Se consideră grupul $(G, \cdot)$ și elementele $a, b \in G$, iar $x = aba^{-1}$. Să se calculeze
 $x^2, x^7, x^n, n \in \mathbf{N}$.

(propus de prof. Zay Éva, CNS Zalău din culegerea *Exerciții și probleme pt cl. a XII-a*
M. Burtea, G. Burtea, Ed. Carminis, 2001)

Soluție

$$x^2 = (aba^{-1})(aba^{-1}) = ab(a^{-1}a)ba^{-1} = abba^{-1} = ab^2a^{-1}$$

$$x^3 = x^2 \cdot x = (ab^2a^{-1})(aba^{-1}) = ab^2(a^{-1}a)ba^{-1} = ab^3a^{-1} \dots\dots\dots 3 \text{ puncte}$$

presupunem că $x^n = ab^n a^{-1}$ pentru un n dat și demonstrăm că pentru $n + 1$ $x^{n+1} = ab^{n+1} a^{-1}$.

$$x^{n+1} = x^n \cdot x = (ab^n a^{-1})(aba^{-1}) = ab^n(a^{-1}a)ba^{-1} = ab^n ba^{-1} = ab^{n+1} a^{-1} \dots\dots\dots 3 \text{ puncte}$$

Deci, $x^n = ab^n a^{-1}, \forall n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow x^7 = ab^7 a^{-1} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

PROBLEMA 3

a) Să se calculeze $\int \frac{\sin x}{5 \sin x + 7 \cos x} dx, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b) Să se calculeze $\int \frac{x + \sin^2 x + \sin 2x}{x - \cos^2 x} dx, x > 1$

(propus de prof. Conde Maria – Colegiul Național „Simion Bărnuțiu” Șimleu Silvaniei)

Soluție

a) Notăm $I = \int \frac{\sin x}{5 \sin x + 7 \cos x} dx, J = \int \frac{\cos x}{5 \sin x + 7 \cos x} dx \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$$\begin{cases} 5I + 7J = x + C_1 \\ -7I + 5J = \ln(5 \sin x + 7 \cos x) + C_2 \end{cases} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$I = \frac{5}{74}x + \frac{7}{74} \ln(5 \sin x + 7 \cos x) + C \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

b) $\varphi(x) = x - \cos^2 x, \varphi'(x) = 1 + \sin 2x \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$$I = \int \frac{x + \sin^2 x + \sin 2x}{x - \cos^2 x} dx = \int \frac{x + 1 - \cos^2 x + \sin 2x}{x - \cos^2 x} dx = \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$\int \frac{x - \cos^2 x}{x - \cos^2 x} dx + \int \frac{1 + \sin 2x}{x - \cos^2 x} dx = x + \ln(x - \cos^2 x) + C$$

$$I = x + \ln(x - \cos^2 x) + C \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

PROBLEMA 4

Determinați funcțiile $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, cu derivata continuă, care admit o primitivă F , satisfăcând condițiile:

(i) $F(0) = F(1) = 0$;

(ii) $xf(x^2) = F(x)f'(x)$, pentru orice x din $[0, 1]$.

(Gazeta Matematică)

Soluție

Integrând pe $[0, 1]$ se obține $\int_0^1 F(x)f'(x)dx = F(x)f(x)|_0^1 - \int_0^1 f^2(x)dx = -\int_0^1 f^2(x)dx \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

$$\int_0^1 xf(x^2)dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}(F(1) - F(0)) = 0 \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro



**MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII ȘTIINȚIFICE**

Scăzând relațiile și folosind (ii) se obține $\int_0^1 f^2(x)dx = 0$ 2 puncte

Finalizare, f este funcția identic nulă.....1 punct