

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 16.02.2019
CLASA A XII-A
Vâlcea

SUBIECTUL I

Pe mulțimea $G = (-k, k)$, unde $k > 0$, se consideră operația „ $*$ ” definită prin $x * y = \frac{k^2(x+y)}{k^2 + xy}$.

a) Demonstrați că $(G, *)$ este grup abelian.

b) Arătați că funcția $f: G \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x \frac{1}{k^2 - t^2} dt$ este un izomorfism de grupuri de la $(G, *)$ la $(\mathbb{R}, +)$.

c) Pentru $k=1$ demonstrați că pentru orice $a \in G$ ecuația $x * x = a$ are o unică soluție $x \in G$.

SUBIECTUL II

Fie $(G, \cdot)$ grup și $x, y \in G$.

a) Arătați că $(xyx^{-1})^{2019} = xy^{2019}x^{-1}$.

b) Arătați că dacă există un număr natural nenul n astfel încât $(xyx^{-1})^n = e$ atunci $y^n = e$.

c) Arătați că dacă $(y^{-1}xy)^4 = e$ și $xy = yx^2$ atunci $x = e$.

SUBIECTUL III

a) Calculați $\int \frac{x \cdot \arctg x}{(1+x^2)^2} dx$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{\arctg(x^2)}{1+x^2} dx$.

SUBIECTUL IV

Calculați $\int_2^6 \frac{\ln(x-1)}{x^2 + 2x + 2} dx$.

G.M. Nr. 5 / 2018, Prof. Radu Diaconu, Sibiu

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7 puncte

Toate subiectele sunt obligatorii