

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală- 28 februarie 2015

clasa a XII a

Barem de corectare si notare

Subiect 1(Prof.univ.dr.habil.Cristinel Mortici, Gazeta Matematică 11-12/1989)Considerăm G un grup și funcția $f : G \rightarrow G$, $f(x) = x^3$ cu următoarele proprietăți:a) f este surjectivă;b) $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, $(\forall) x, y \in G$.i) Demonstrați că $x^2y = yx^2$, $(\forall) x, y \in G$.ii) Arătați că G este grup abelian.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $(\forall) y \in G, (\exists) z \in G$, astfel încât $z^3 = y$	1p
$x^2y = x^{-1}x^3z^3 = x^{-1}(xz)^3 = (zx)^2z$	1p
$yx^2 = z^3x^3x^{-1} = (zx)^3x^{-1} = (zx)^2z$	1p
b) Dacă $(xy)^3 = x^3y^3$, atunci $(yx)^2 = x^2y^2$	2p
Arată că $x^2y^2 = y^2x^2$	1p
Finalizare	1p

Subiect 2(Prof.Șerban Buzeteanu și Prof.C.Niță,Gazeta Matematică,7/1984)Fie A un inel și funcția $f : A \times A \rightarrow A$, definită prin $f(x, y) = (xy)^2 - x^2y^2$.a) Să se calculeze valoarea expresiei $E(x, y) = f(1+x, 1+y) - f(1+x, y) - f(x, 1+y) + f(x, y)$, unde $1 \in A$ este elementul unitate al inelului A .b) Dacă inelul A are proprietatea că $x + x = 0$ implică $x = 0$ și dacă $(xy)^2 - (yx)^2 = x^2y^2 - y^2x^2$, $(\forall) x, y \in A$, atunci A este un inel comutativ.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Avem $f(x, y) = x(xy - yx)y$	1p
Obține $f(1+x, 1+y) - f(1+x, y) - f(x, 1+y) - f(x, y) = yx - xy$	2p
b) Dacă $(xy)^2 - (yx)^2 = x^2y^2 - y^2x^2$ atunci $(xy)^2 - x^2y^2 = (yx)^2 - y^2x^2 \Rightarrow f(x, y) = f(y, x) \Rightarrow E(x, y) = E(y, x)$.	2p
Cum $E(x, y) = E(y, x) \Rightarrow yx - xy = xy - yx \Rightarrow 2(xy - yx) = 0$	1p
Finalizare	1p

Subiect 3 (Prof. Traian Tămăian, Gazeta Matematică, 11/2014)

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (n+n)}}{e^{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}}$. (Se admite cunoscut următorul rezultat: șirul

$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n, n \geq 1$, este convergent, iar limita sa $c \in (0, 1)$)

Detalii rezolvare	Barem asociat
Fie $x_n = \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (n+n)}}{e^{\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}}, n \geq 2$. Scrie $x_n = e^{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) + \ln n - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}$	3p
Avem $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 \ln(1+x) dx = \ln 4 - 1$	3p
Finalizare $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4 \cdot e^{-1-c}$.	1p

Subiect 4 (Prof. Florin Stănescu, Gazeta Matematică, 1/2014)

Fie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $\int_0^1 xf(x) dx = 0$. Să se arate că există $c \in (0, 1)$ astfel încât

$$f(c) = \left(\int_c^1 f(x) dx \right)^2.$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
Arată că $\int_0^1 F(t) dt = 0$	2p
Din teorema de medie, există $m \in (0, 1)$ astfel încât $F(m) = 0$.	1p
Definim funcția $\varphi: [m, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(y) = e^{-\int_y^1 F(x) dx} \cdot F(y)$. Cum $\varphi(m) = \varphi(0) = 0$, din teorema lui Rolle, există $c \in (0, 1)$ astfel încât $\varphi'(c) = 0$.	3p
Finalizare	1p