

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 23 FEBRUARIE 2020

Clasa a V-a**Problema 1.** Determinați numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ pentru care:

$$a^a = a + 2b + 3c + 4d.$$

*Daniel Stretcu, Drobeta-Turnu Severin, G.M. nr. 12/2019***Soluție:**Din a, b, c, d cifre obținem că $a + 2b + 3c + 4d \leq 9 + 18 + 27 + 36$ Deci $a^a \leq 90$ 2 pPentru $a \geq 4$ obținem $a^a \geq 256$ (fals) 1 pPentru $a=3$ obținem $24 = 2b + 3c + 4d$, de unde:sau $d=6, b=c=0$;Sau $d=5, b=2$ și $c=0$;sau $d=4, b=4, c=0$; sau $d=4, b=1, c=2$;sau $d=3, b=6, c=0$; sau $d=3, b=3, c=0$; sau $d=3, b=0, c=4$;sau $d=2, b=8, c=0$; sau $d=2, b=5, c=2$; sau $d=2, b=2, c=4$;sau $d=1, b=7, c=2$; sau $d=1, b=4, c=4$; sau $d=1, b=1, c=6$;Pentru $a=2$ obținem $2 = 2b + 3c + 4d$, de unde $b=1, c=d=0$;Pentru $a=1$ obținem $0 = 2b + 3c + 4d$, de unde $b=c=d=0$; 3p $\overline{abcd} \in \{3006, 3205, 3404, 3124, 3603, 3303, 3043, 3802, 3522, 3242, 3721, 3441, 3161, 2100, 1000\}$... 1 p**Problema 2.** Fie numărul $N = 2^{2n+4} \cdot 5^{2n} + 10^{2n} \cdot 5^2 - 6 \cdot 20^n \cdot 5^n$, unde n este număr natural.a) Arătați că N nu este pătrat perfect, pentru nicio valoare a lui n .b) Scrieți numărul N ca suma a trei pătrate perfecte.*prof. Gabriela Ionică, Slatina***Soluție:**a) Descompunerea lui N în produs de factori primi folosind proprietățile puterilor și factorul comun: $N = 2^{2n} \cdot 2^4 \cdot 5^{2n} + (2 \cdot 5)^{2n} \cdot 5^2 - 6 \cdot (2^2 \cdot 5)^n \cdot 5^n$ 1 p $N = 2^{2n} \cdot 2^4 \cdot 5^{2n} + 2^{2n} \cdot 5^{2n} \cdot 5^2 - 6 \cdot 2^{2n} \cdot 5^n \cdot 5^n$ 1 p $N = 2^{2n} \cdot 5^{2n} (2^4 + 5^2 - 6) = 10^{2n} \cdot 35$ 1 pDin 7 divide pe N , dar 7^2 nu divide pe N , deducem că N nu poate fi pătrat perfect 2pb) Scrierea lui N ca suma a trei pătrate perfecte: $10^{2n} + 10^{2n} \cdot 3^2 + 10^{2n} \cdot 5^2$ 2 p

Problema 3. Bunicul împarte nepoților 48 batoane de ciocolată din 14 pachete care au câte două, trei sau patru batoane de ciocolată. Știind că numărul pachetelor cu patru batoane este cu 4 mai mare decât cel al pachetelor cu trei batoane, aflați numărul pachetelor din fiecare categorie.

prof. Steluța Dan, Slatina

Soluție:

Înlocuind pachetele cu câte patru batoane cu pachete de câte trei batoane, se „pierd” 4 batoane de ciocolată din cele 48 2p
Așadar, în 14 pachete cu câte două sau câte trei batoane se află în total 44 de batoane 1p
Presupunând că toate pachetele ar avea câte trei batoane, în total am avea $14 \cdot 3 = 42$ de batoane 1p
Diferența $44 - 42 = 2$ provine din pachetele care au câte două batoane (și nu trei, așa cum am presupus), deci bunicul avea 2 pachete cu câte două batoane 1p
Sunt 12 batoane cu câte trei și patru batoane și, cum numărul pachetelor cu patru batoane este cu 4 mai mare decât cel al pachetelor cu trei batoane, rezultă că bunicul avea 4 pachete de câte trei batoane și 8 pachete de câte patru batoane 2p

Problema 4. Determinați suma tuturor resturilor împărțirilor a 100 de numere naturale consecutive la 19, știind că cel mai mic număr dintre cele 100 de numere se împarte exact la 19.

prof. Gabriela Ionică, Slatina

Soluție:

Resturile împărțirii primelor 19 numere consecutive la 19 vor fi numerele de la 0 la 18, pentru care suma este 171 2p
De la 1 la 100 numere vom avea 5 grupe de câte 19 numere consecutive (pentru care suma resturilor împărțirii la 19 este $5 \cdot 171 = 855$) și încă 5 numere pentru care suma resturilor va fi $0+1+2+3+4$ 3p
În total, suma resturilor împărțirii celor 100 numere la 19 va fi 865 2p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 23 FEBRUARIE 2020

Clasa a VI-a

Problema 1. Determinați numărul natural n de forma $n = 3^a \cdot 5^b$, unde $a, b \in \mathbb{N}$, știind că numărul $3n$ are cu patru divizori mai mulți decât are n , iar numărul $5n$ are cu cinci divizori mai mulți decât n .

prof. Iuliana Trașcă, Scornicești

- a) Numărul n are $(a+1)(b+1)$ divizori.....1p
Numărul $3n$ are $(a+2)(b+1)$ divizori.....1p
Numărul $5n$ are $(a+1)(b+2)$ divizori.....1p
Conform condițiilor din enunț $(a+1)(b+1)+4=(a+2)(b+1)$ 1p
 $(a+1)(b+1)+5=(a+1)(b+2)$ 1p
Obținem $a=4, b=3$2p

Problema 2. Numerele naturale nenule a, b, c și d sunt invers proporționale cu numerele:

$$\frac{2020}{2019a+b}, \frac{2020}{2019b+c}, \frac{2020}{2019c+d}, \text{ respectiv } \frac{2020}{2019d+a}.$$

Arătați că numărul $\frac{(a+b+c+d)^{2020}}{(abcd)^{504}}$ este pătrat perfect.

prof. Iuliana Trașcă, Scornicești

$$\frac{2020a}{2019a+b} = \frac{2020b}{2019b+c} = \frac{2020c}{2019c+d} = \frac{2020d}{2019d+a} = \frac{2020(a+b+c+d)}{2020(a+b+c+d)} = 1 \dots\dots\dots 3p$$

Deci $a=b=c=d$2p

$$\frac{(a+b+c+d)^{2020}}{(abcd)^{504}} = \frac{(4a)^{2020}}{(a^4)^{504}} = \frac{4^{2020} a^{2020}}{a^{2016}} = (4^{1010} a^2)^2 \dots\dots\dots 2p$$

Problema 3. Trei unghiuri formate în jurul punctului O au măsurile x, y, z (exprimate în grade). Dacă x și y sunt direct proporționale cu 2 și 3, iar y și z sunt invers proporționale cu 0,1(6) și 0,2, determinați:

- măsurile x, y, z ale celor trei unghiuri;
- măsura unghiului dintre bisectoarea unghiului de măsură x și bisectoarea unghiului de măsură y .

prof. Florin Rișcă, Slatina

Se obține că $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = k$ și, deci $x=2k$, iar $y=3k$

1p

$$y \cdot \frac{1}{6} = z \cdot \frac{1}{5}$$

1p

Înlocuim y cu $3k$ și obținem $\frac{k}{2} = \frac{z}{5}$ și, deci $z = \frac{5k}{2}$

1p

Suma unghiurilor este 360° și atunci:

$$2k + 3k + \frac{5k}{2} = 360^\circ \text{ și deci } k = 48^\circ \quad 2p$$

$$x = 96^\circ, y = 144^\circ \text{ și } z = 120^\circ \quad 1p$$

Unghiul dintre bisectoarele unghiurilor cerute are măsura $\frac{96^\circ + 144^\circ}{2} = 120^\circ \quad 1p$

Problema 4. Numerele naturale nenule a și b verifică relațiile:

$$\frac{70}{3a+b^2} < \frac{b}{3} < \frac{10}{7} < \frac{a}{8} < \frac{9}{5}.$$

Calculați $4a + 5b$.

prof. Iuliana Trașcă, Scornicești

Avem $\frac{10}{7} < \frac{a}{8} < \frac{9}{5} \Rightarrow \frac{80}{7} < a < \frac{72}{5}, a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \in \{12, 13, 14\} \quad (1) \dots\dots\dots 2p$

și $\frac{70}{3a+b^2} < \frac{b}{3} < \frac{10}{7} \Rightarrow \frac{210}{3a+b^2} < b < \frac{30}{7}, b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \begin{cases} b \in \{1, 2, 3, 4\} \\ \frac{210}{3a+b^2} < b \end{cases} \dots\dots\dots 2p$

Pentru $b \in \{1, 2, 3\}$ ținând cont de $\frac{210}{3a+b^2} < b \Rightarrow$ nu se verifică relația (1), $\dots\dots\dots 1p$

$b = 4 \Rightarrow a > \frac{73}{6} > 12, a \in \mathbb{N}$, folosind relația (1) $\Rightarrow a \in \{13, 14\} \dots\dots\dots 1p$

$(a, b) \in \{(13, 4), (14, 4)\} \Rightarrow 4a + 5b \in \{72, 76\} \dots\dots\dots 1p$

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 23 FEBRUARIE 2020

Clasa a VII-a

Problema 1. a) Fie $a = \sqrt{\frac{8}{7} + \frac{9}{14} + \frac{10}{21} + \dots + \frac{119}{784} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{112}\right)}$.

Arătați că a este număr natural, pătrat perfect.

b) Știind că $\overline{123abc}$ este pătrat perfect, calculați $\sqrt{123abc}$.

$$\frac{8}{7} + \frac{9}{14} + \frac{10}{21} + \dots + \frac{119}{784} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{112}\right) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{7} = \frac{112}{7} = 16 \dots \dots \dots 2p$$

Deci $\sqrt{16} = 4$ pătrat perfect1p

$351 \leq \sqrt{123abc} \leq 352$, deci $\overline{123abc} \in \{351^2, 352^2\}$2p

$351^2 = 123201$, $352^2 = 123904$, deci $\overline{abc} \in \{201, 904\}$ 2p

Problema 2. Aflați numerele naturale $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ și $\overline{ef}$ care verifică simultan condițiile $\overline{ab} + \overline{ef} = 4 \cdot \overline{cd}$ și

$$\overline{ab} = \sqrt{cdef}.$$

Notăm cu $x = \overline{ab}$, $y = \overline{cd}$ și $z = \overline{ef}$

Relațiile din enunț devin $4y = x + z$, $x = \sqrt{100y + z}$, $x, y, z \in \{10, \dots, 99\}$1p

Obținem $x^2 = 100y + z$, deci $x^2 + x = 104y = 8 \cdot 13y$ 1p

Cum $8/x(x+1)$ rezulta $8/x$ sau $8/(x+1)$.

Din $13/x(x+1)$ deducem că $13/x$ sau $13/(x+1)$ 1p

Avem cazurile

a) $8/x$ și $13/x$ Rezultă $x=8l$ și $x=13s$. Atunci $104/x$, fals.....1p

b) $8/x$ și $13/(x+1)$ Atunci $x=8l$ și $x=13s-1$. Obținem $13s-8l=1$, $13s-8l=65-64$, $13(s-5)=8(1-8)$. Rezultă că $8/s-5$. Cum $13s-1 \leq 99$, deci $s \leq 7$, deducem că $s=5$. Obținem $x=64$, $y=40$ și $z=96$1p

c) $8/(x+1)$ și $13/x$. Avem $x=8l-1$ și $x=13s$. Rezultă $13s-8l=-1$, $13s-8l=-65+64$, $13(s+5)=8(1+8)$. Deducem că $8/s+5$ și cum $s \leq 7$, rezultă $s=3$, deci $x=39$. De aici $y=15$ și $z=21$1p

d) $8/(x+1)$ și $13/(x+1)$. Atunci rezultă că $104/(x+1)$ fals.....1p

Deci soluțiile sunt $(64, 40, 96)$ și $(39, 15, 21)$

Problema 3. În triunghiul ascuțitunghic ABC , cu $A = 60^\circ$, se notează cu M mijlocul laturii BC și se construiesc $BD \perp AC$, $CE \perp AB$, unde $D \in AC$, $E \in AB$.

Arătați că triunghiul DEM este echilateral.

Anca Mariana Cârțu și Ioan Tebieș, Năsăud, G.M. nr. 10/2019

Notăm $\angle DBM = \alpha$ și $\angle ECM = \beta$

În $\triangle BEC$ dreptunghic în E , EM mediană, obținem

$$EM = \frac{BC}{2} = BM \text{ adică } \triangle BEM \text{ este isoscel, } \angle MEB = \angle EBM (30^\circ + \alpha) \text{ și } \angle EMB = 120^\circ - 2\alpha \dots \dots \dots 2p$$

În $\triangle BDC$ dreptunghic în D , DM mediană, obținem

$$DM = \frac{BC}{2} = MC \text{ adică } \triangle DMC \text{ este isoscel, } \angle MDC = \angle MCD (30^\circ + \beta) \text{ și } \angle DMC = 120^\circ - 2\beta \dots \dots \dots 2p$$

$$\angle EMD = 180^\circ - \angle EMB - \angle DMC = 60^\circ \text{ și cum } ME = DM = \frac{BC}{2} \text{ rezultă că } \triangle DEM \text{ este echilateral.} \dots 3p$$

Problema 4. Fie $ABCD$ un patrulater cu $AB \parallel DC$ și cu diagonalele perpendiculare.



a) Arătați că $AB + DC < AD + BC$.

b) Dacă, în plus, DB este bisectoarea unghiului ADC , demonstrați că $ABCD$ este romb.

a) Fie $\{O\} = AC \cap BD$ și EF linie mijlocie în trapez.

Atunci $EF = \frac{AB+DC}{2}$, $OE = \frac{AD}{2}$, $OF = \frac{BC}{2}$2p

În triunghiul OEF , $EF < OE + OF$ rezultă $AB + DC < AD + BC$1p

b) În triunghiul ADC , DO este înălțime și bisectoare, deci $AD = DC$1p

Deoarece $\angle BDC = \angle ADB$ și $\angle BDC = \angle ABD$ (alterne interne) rezultă $\angle ABD \equiv \angle ADB$, deci

$\triangle ABD$ este isoscel cu baza BD2p

Ca urmare, $AB = DC$ și $AB \parallel DC$ ceea ce implică $ABCD$ paralelogram cu $AD = DC$, deci $ABCD$ romb...1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 23 FEBRUARIE 2020

Clasa a VIII-a

Problema 1. Demonstrați că $F(n) = \frac{n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n}{24}$ este număr natural, pentru orice număr natural n .

[***]

$$A(n) = n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n = (n-1)n(n+1)(n+2) \dots \dots \dots 2pc.$$

$$24 = 3 \cdot 8 \text{ și } (3;8)=1 \text{ și } \frac{A(n)}{24} \in \mathbb{N} \Rightarrow 3/A(n) \text{ și } 8/A(n) \dots \dots \dots 1pc.$$

$$\text{Din } n \in \{3k, 3k+1, 3k+2, k \in \mathbb{N}\} \text{ și } 3/A(n) \dots \dots \dots 2pc.$$

$$\text{Din } n \in \{4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3, k \in \mathbb{N}\} \text{ și } 8/A(n) \dots \dots \dots 2pc.$$

Problema 2. Fie numerele reale $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2019} > 0$ astfel încât:

$$\frac{a_1 \sqrt{a_2}}{a_1+1} + \frac{a_2 \sqrt{a_3}}{a_2+1} + \frac{a_3 \sqrt{a_4}}{a_3+1} + \dots + \frac{a_{2018} \sqrt{a_{2019}}}{a_{2018}+1} + \frac{a_{2019} \sqrt{a_1}}{a_{2019}+1} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2019}}{2}.$$

Calculați $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2019}$.

Cătălin Cristea, Craiova, G.M. nr. 11/2019

$$\text{Din } a_1 > 0 \text{ și } 1 > 0 \text{ și } M_g \leq M_a \text{ avem : } \sqrt{a_1 \cdot 1} \leq \frac{a_1+1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a_1}}{a_1+1} \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Dacă înmulțim relația cu } \sqrt{a_1 \cdot a_2} > 0 \text{ obținem } \frac{a_1 \sqrt{a_2}}{a_1+1} \leq \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{a_1+a_2}{2} = \frac{a_1+a_2}{4}, \text{ având}$$

$$\text{egalitate pentru } a_1 = 1 \dots \dots \dots 4pc.$$

$$\text{Scrierea analoagă a relațiilor} \dots \dots \dots 1pc.$$

$$\text{Efectuarea sumei și obținerea relației } \frac{a_1 \sqrt{a_2}}{a_1+1} + \frac{a_2 \sqrt{a_3}}{a_2+1} + \frac{a_3 \sqrt{a_4}}{a_3+1} + \dots + \frac{a_{2018} \sqrt{a_{2019}}}{a_{2018}+1} + \frac{a_{2019} \sqrt{a_1}}{a_{2019}+1} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2019}}{2} \dots \dots 1pc.$$

Trecerea la egalitatea dată în ipoteză și concluzia:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots a_{2019} = 1, \text{ de unde : } a_1 + a_2 + \dots a_{2019} = 2019 \dots 1pc.$$

Problema 3. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată de înălțime $VO = 6$ cm.

a) Dacă triunghiurile VBC și VAC au arii egale, arătați că $AB = 12$ cm.

b) Dacă Q este mijlocul lui $[AO]$ și $DQ \cap AB = \{T\}$, determinați măsura unghiului dintre dreapta VT și planul (VAC) .

prof. Nicolae Bivol, Corabia

$$\text{Fie } VM \perp BC \Rightarrow A_{VBC} = \frac{AB \cdot VM}{2}$$

$$VO \perp (ABC) \Rightarrow VO \perp AC \Rightarrow A_{VAC} = \frac{VO \cdot AC}{2}$$

$$\text{Din } A_{VBC} = A_{VAC} \Rightarrow \frac{AB \cdot VM}{2} = \frac{VO \cdot AC}{2} \text{ si } AC = AB\sqrt{2} \Rightarrow VM = VO\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ cm.}$$

$$\text{In } \triangle VOM, \angle O = 90^\circ, OM^2 = VM^2 - VO^2 \Rightarrow OM = 6 \text{ cm} \Rightarrow AB = 12 \text{ cm} \dots 3 \text{ pc.}$$

Determinarea prin orice metoda a relatiei $TB = 2TA \dots 1 \text{ pc.}$

Din $ABCD$ patrat $\Rightarrow OB \perp AC$, iar din $VABCD$ piramida regulata $VO \perp (ABC) \Rightarrow VO \perp BO \Rightarrow OB \perp (VAC) \dots 1 \text{ pc.}$

Construim $TN \parallel OB, N \in [AO] \Rightarrow TN \perp (VAC) \Rightarrow [VN]$ este proiectia lui $[VT]$ pe $(VAC) \Rightarrow m(\angle VT, (VAC)) = m(\angle VT, VN) = m(\angle TVN) \dots 1 \text{ pc.}$

$$\text{Calculul unghiului : } \tan \angle TVN = \frac{\sqrt{34}}{17} \dots 1 \text{ pc.}$$

Problema 4. Fie $ABCD A'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată, cu $AB = 18$ cm. Prin mijlocul M al laturii $[BC]$ se construiește un plan perpendicular pe $(AA'C')$ care intersectează muchia $[D'C']$ în T și muchia $[DC]$ în P . Măsura unghiului dintre dreapta OB' și planul (ACC') este 30° .

Fie Q un punct pe $[CC']$ astfel încât perimetrul triunghiului BTQ este minim. Calculați CQ .

prof. Nicolae Bivol, Corabia

Demonstrarea faptului ca $B'O' \perp (ACC')$ de unde $[OO']$ este proiectia lui $[B'O]$ pe (ACC') , de unde unghiul dintre $B'O$ și (ACC') este $\angle B'OO' = 30^\circ \dots 1 \text{ pc.}$

$$\text{Calculul lui } OO' = 9\sqrt{6} \text{ cm} \dots 1 \text{ pc.}$$

Construcția planului perpendicular pe (ACC') , ducând o paralelă prin M la DB , cu demonstrațiile necesare pentru punctele de intersecție cu laturile $[DC]$, $[D'C']$ și $[B'C'] \dots 2 \text{ pc.}$

Desfășurarea suprafeței laterale a prisme pentru obținerea poziției de minim a punctului Q pe $[CC'] \dots 2 \text{ pc.}$

$$\text{Calculul lui } CQ = 6\sqrt{6} \text{ cm} \dots 1 \text{ pc.}$$