

Soluții și bareme orientative

Clasa a X-a

Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

$$1. z^2 + z + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = \overline{z^2 + z + 1} \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = \bar{z}^2 + \bar{z} + 1 \stackrel{|z|=1}{\Leftrightarrow} \quad (1p)$$

$$\stackrel{|z|=1}{\Leftrightarrow} z^2 + z + 1 = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = \frac{z^2 + z + 1}{z^2} \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0 \text{ sau } z^2 = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z \in \{\varepsilon, \varepsilon^2, 1, -1\}. \quad (3p)$$

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + 1 + (-1) = -1. \quad (1p)$$

Patrulaterul având vârfurile $A(\varepsilon), B(-1), C(\varepsilon^2), D(1)$ este ortodiagonal ($AC \perp BD$),

$$\text{deci aria acestuia este } \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2} = \sqrt{3}. \quad (2p)$$

$$2. \quad x \rightarrow \log_3 x = g, x \in [3, \infty), \text{Im}g = [1, \infty);$$

$$x \rightarrow x^2 - x = h, x \in [1, \infty), \text{Im}h = [0, \infty),$$

sunt funcții bijective. Se deduce că $f: [3, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = (g \circ h)(x) = \log_3^2 x - \log_3 x$ este bijectivă. (4p)

$$\text{Se obține } f^{-1}: [3, \infty) \rightarrow [0, \infty), f^{-1}(x) = 3^{\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}}. \quad (1p)$$

$$\text{Din } f^{-1}(n) \in \{3m | m \in \mathbb{N}^*\} \text{ se deduce } n = p^2 + p, p \in \mathbb{N}. \quad (2p)$$

$$3. a) \text{ Se impune condiția: } x \in [2, \infty). \text{ Pentru } k = \overline{1, 4} \text{ avem } [x^k] \leq x^k \Rightarrow 1 \leq \log_{[x^k]} x^k \Rightarrow \\ \log_{[x^k]} x \geq \frac{1}{k} (*). \quad (2p)$$

$$\text{Deci } \log_{[x]} x + \log_{[x^2]} x + \log_{[x^3]} x + \log_{[x^4]} x - 2 \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 2 = \frac{1}{12}. \quad (1p)$$

$$\text{Egalitate are loc în cazul: } \log_{[x^k]} x = \frac{1}{k}, (\forall) k = \overline{1, 4}, \text{ care au loc simultan } \Leftrightarrow x \in \mathbb{N}, x \geq 2.$$

$$\text{Deci ecuația admite soluții de forma: } x = n, x \in \mathbb{N}, x \geq 2. \quad (1p)$$

$$b) \text{ Notăm } \alpha = \lg a, \beta = \lg b, \gamma = \lg c \text{ avem } \alpha \leq \beta \leq \gamma < 0 \quad \text{și}$$

$$A = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{și} \quad B = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\alpha}{\gamma} \quad (2p)$$

$$\text{atunci} \quad A - B = \frac{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)}{\alpha\beta\gamma} \leq 0 \Rightarrow A \leq B \quad (1p)$$

$$4. \text{ Notăm } a^{x_i} = a_i, \text{ deci } a_i \in (0, 1), i = \overline{1, n}. \quad (1p)$$

Arătăm prin inducție că dacă $a_i \in (0, 1)$,

$$i = \overline{1, n}, a_j + a_k < 1, \forall j, k = \overline{1, n}, j \neq k \text{ și } \sum_{i=1}^n a_i \leq a, \text{ atunci } \prod_{i=1}^n (1 - a_i) \geq 1 - a.$$

$$\text{Pentru } n = 1, \text{ inegalitatea este evidentă.} \quad (2p)$$

$$\text{Fie } a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} \in (0, 1) \text{ cu } a_j + a_k < 1, \forall j, k = \overline{1, n+1}, j \neq k \text{ și}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i \leq a. \text{ Cum } \sum_{i=1}^n a_i \leq a - a_{n+1}, \text{ din ipoteza de inducție rezultă că } \prod_{i=1}^n (1 - a_i) \geq 1 - a - a_{n+1}.$$

Atunci:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i) &= (1-a_{n+1})\prod_{i=1}^n(1-a_i) = \prod_{i=1}^n(1-a_i) - a_{n+1}\prod_{i=1}^n(1-a_i) \geq \\ &\geq 1-a + a_{n+1}\left(1-\prod_{i=1}^n(1-a_i)\right) \geq 1-a,\end{aligned}$$

deoarece

$$a_{n+1} > 0 \text{ și } \prod_{i=1}^n(1-a_i) < 1.$$

(4p)