

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17.02.2018

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XI – a

PROBLEMA 1. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{Q})$ astfel încât $\det(\sqrt{2}A + B) = \det(A + B\sqrt{3}) = 0$.

Demonstrați că:

a) $\det A = \frac{1}{2} [(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)]$;

b) $\det A = \det B$;

c) $\operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(A \cdot B)$.

Barem de corectare.

a) Relația cerută se poate obține prin calcul direct, sau din Teorema lui Cayley-Hamilton avem

$$A^2 = \operatorname{tr}(A) \cdot A - (\det A) \cdot I_2 \Rightarrow \operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(A) \cdot \operatorname{tr}(A) - 2 \cdot (\det A), \text{ de unde concluzia. } (2p)$$

b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Din $\det(\sqrt{2}A + B) = 0$ obținem

$$(2 \cdot \det A + \det B) + \sqrt{2}(at + xd - bz - yc) = 0 \quad (1)$$

Deoarece $A, B \in M_2(\mathbb{Q})$, rezultă că $2 \cdot \det A + \det B = 0$ (1p)

Analog, $\det A + 3 \cdot \det B = 0$ (1p)

În concluzie, $\det A = \det B = 0$ (1p)

c) Deoarece $\operatorname{tr}(AB) = ax + bz + cy + dt$ și $\operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B = ax + at + dx + dt$, (1p)

iar din relația (1) avem că $at + dx = bz + cy$, obținem concluzia.. (1p)

PROBLEMA 2. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ astfel încât $A^2 + A + I_n = O_n$. Aflați n , știind că $\det(A^n + I_n) = 2^{2016}$.

Barem de corectare.

Folosind relația dată obținem $A^3 = I_n$, deci $\det A = 1$ (2p)

Deci $A^n = I_n$, dacă $n = 3k$, $A^n = A$, dacă $n = 3k + 1$ și $A^n = A^2$, dacă $n = 3k + 2$ (1p)

Dacă $n = 3k$, atunci $\det(A^n + I_n) = \det(2I_n) = 2^n$ (1p)

Dacă $n = 3k + 1$, atunci $\det(A^n + I_n) = \det(A + I_n) = \det(-A^2) = (-1)^n$ (1p)

Dacă $n = 3k + 2$, atunci $\det(A^n + I_n) = \det(A^2 + I_n) = \det(-A) = (-1)^n$ (1p)

Singurul caz care convine este $n = 3k$ și deoarece 2016 este divizibil cu 3, avem $n = 2016$ singura soluție (1p)

PROBLEMA 3. Fie $a \in (0, 1)$. Definim șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, prin $x_0 > 0$ și $x_n = a^2 + a + \sqrt{x_{n-1}} - 2a\sqrt{a + \sqrt{x_{n-1}}}$, $n \geq 1$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și să se determine limita sa.

Barem de corectare.

Avem $x_n = (\sqrt{a + \sqrt{x_{n-1}}} - a)^2 > 0$ pentru orice $n \geq 1$ (1p)

Putem defini șirul $(y_n)_{n \geq 0}$, prin $y_n = \sqrt{x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Relația de recurență devine $y_n^2 = (\sqrt{a + y_{n-1}} - a)^2$ și deoarece $y_n > 0$, pentru orice $n \geq 1$, obținem $y_n = \sqrt{a + y_{n-1}} - a$, pentru orice $n \geq 1$ (1p)

Avem (1) $y_n - y_{n-1} = \sqrt{a + y_{n-1}} (1 - \sqrt{a + y_{n-1}})$ pentru orice $n \geq 1$ (1p)

Avem următoarele cazuri:

1. dacă $y_0 < 1 - a$, atunci (se demonstrează prin inducție) $y_n < 1 - a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci șirul $(y_n)_{n \geq 0}$ este mărginit; Din (1) obținem că șirul $(y_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător, deci convergent..... (1p)

2. dacă $y_0 > 1 - a$, atunci $y_n > 1 - a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci șirul $(y_n)_{n \geq 0}$ este mărginit inferior.

Din (1) rezultă că șirul $(y_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător, deci convergent..... (1p)

3. dacă $y_0 = 1 - a$, atunci $y_n = 1 - a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci este convergent, cu limita $1 - a$ (1p)

Trecând la limită în relația de recurență, obținem că $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1 - a$, de unde rezultă că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (1 - a)^2$ (1p)

PROBLEMA 4.

a) Aflați parametrii $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{an^2 + bn + c} - n - 2) = 2018$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 5n - 2})$.

Barem de corectare.

a) Notăm $L(a, b, c) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{an^2 + bn + c} - n - 2)$

$$L(a, b, c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(an^2 + bn + c - (n+2)^2)}{\sqrt{an^2 + bn + c} + n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-1)n^2 + (b-4)n + (c-4)}{\sqrt{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}} + 1 + \frac{2}{n}} \dots (2p)$$

Deci $L(a, b, c) = 2018 \Leftrightarrow a = 1$, $b = 4$ și $c = 4040$ (1p)

b) Dacă $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 5n - 2})$, atunci

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 5n - 2} - n(n+1)\pi) \dots (1p)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi(\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 5n - 2} - (n+1))) \dots (1p)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{n(2n-3)\pi}{(\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 5n - 2})^2 + (n+1)\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 5n - 2} + (n+1)^2}\right) \dots (1p)$$

$$= \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots (1p)$$

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.