Olimpiada de matematică

etapa locală

16.02.2014

Clasa a IX-a

1. a) Arătaţi că $[a]+\left[a+\frac{1}{2}\right]=[2a]$ unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

b) Rezolvaţi în R ecuaţia $\left[\frac{2x-1}{12}\right]+\left[\frac{2x+5}{12}\right]+\left[\frac{x+1}{3}\right]=\frac{3x+1}{2}$

Bud Adrian, Negreşti Oaş

Barem:

2p	relaţia lui Hermite
1p	Observăm că $\frac{2x+5}{12}=\frac{2x-1}{12}+\frac{1}{2}\Longrightarrow\left[\frac{2x-1}{12}\right]+\left[\frac{2x+5}{12}\right]=\left[\frac{2x-1}{12}\right]+\left[\frac{2x-1}{12}+\frac{1}{2}\right]=\left[2\cdot\frac{2x-1}{12}\right]=\left[\frac{2x-1}{6}\right]$
1p	Astfel ecuaţia devine $\left[\frac{2x-1}{6}\right]+\left[\frac{x+1}{3}\right]=\frac{3x+1}{2}$
1p	În acelaşi mod avem $\frac{x+1}{3}=\frac{2x-1}{6}+\frac{1}{2}\Longrightarrow\left[\frac{2x-1}{6}\right]+\left[\frac{x+1}{3}\right]=\left[\frac{2x-1}{6}\right]+\left[\frac{2x-1}{6}+\frac{1}{2}\right]=\left[2\cdot\frac{2x-1}{6}\right]=\left[\frac{2x-1}{3}\right]$
1p	Astfel ecuaţia devine $\left[\frac{2x-1}{3}\right]=\frac{3x+1}{2}$
1p	Notăm $\frac{3x+1}{2}=k\in Z\Longrightarrow x=\frac{2k-1}{3}$. Înlocuind în ecuaţie rezultă $\left[\frac{4k-5}{9}\right]=k$ de unde $k\in\{-2,-1\}$ Trecând în necunoscuta x se obţin soluţiile $x\in\left\{-\frac{5}{3};-1\right\}$
7 p	**TOTAL**

2. Arătaţi că numărul m = $\sqrt{(n^2 - n - 6)(n^2 + 3n - 4) + 25}$ este natural, $\forall n \in N$.

RMT, nr.1/2014, Vasile Peiţa

Barem

2 p	m = $\sqrt{(n^2 - n - 6)(n^2 + 3n - 4) + 25} = \sqrt{(n-3)(n+2)(n-1)(n+4) + 25}$
2 p	$= \sqrt{(n-1)(n+2)(n-3)(n+4) + 25} = \sqrt{(n^2 + n - 2)(n^2 + n - 12) + 25}$
1 p	$= \sqrt{(n^2 + n)^2 - 14(n^2 + n) + 49} =$
1 p	$= \sqrt{(n^2 + n - 7)^2}$
1 p	$= \lvert n^2 + n - 7 \rvert \in \mathbb{N}, \forall n \in N$.
7 p	**TOTAL**

Str. 1 Decembrie 1918 nr. 6
Cod 440010 Satu Mare
Tel. +40 (0)261712175
Fax: +40 (0)261713441
www.isj.sm.edu.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

3. a) Arătaţi că $(a+b)^4 \geq 8ab(a^2+b^2), \quad \forall a,b \in (0,\infty)$

b) Demonstraţi că pentru orice $a,b,c \in (0,\infty)$ cu $a+b+c \leq 8$ are loc inegalitatea:

$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^4}+\frac{b^2+c^2}{(b+c)^4}+\frac{c^2+a^2}{(c+a)^4} \leq \frac{1}{abc}.$$

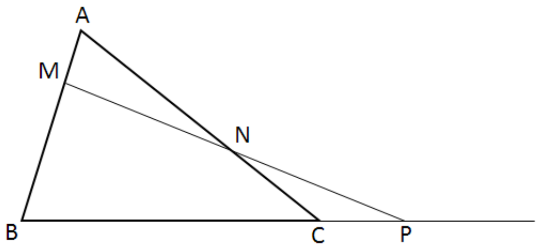
Tămîian Traian, Carei

Barem:

1p	a) Au loc echivalenţele: $(a+b)^4 \geq 8ab(a^2+b^2) \Leftrightarrow$ $(a^2+b^2+2ab)^2 \geq 8ab(a^2+b^2) \Leftrightarrow$
1p	$(a^2+b^2)^2+4ab(a^2+b^2)+(2ab)^2 \geq 8ab(a^2+b^2) \Leftrightarrow$ $(a^2+b^2)^2-4ab(a^2+b^2)+(2ab)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$
1p	$(a^2+b^2-2ab)^2 \geq 0$, relaţie adevărată.
1p	b) Din a) rezultă că $\forall a,b \in (0,\infty)$ are loc inegalitatea $\frac{a^2+b^2}{(a+b)^4} \leq \frac{1}{8ab}$
1p	Analoagele pentru relaţia (1) sunt: $\frac{b^2+c^2}{(b+c)^4} \leq \frac{1}{8bc}$ şi $\frac{c^2+a^2}{(c+a)^4} \leq \frac{1}{8ca}$
1p	Adunând relaţiile de mai sus rezultă $\frac{a^2+b^2}{(a+b)^4}+\frac{b^2+c^2}{(b+c)^4}+\frac{c^2+a^2}{(c+a)^4} \leq \frac{a+b+c}{8abc}$
1p	Cum $a+b+c \leq 8$ rezultă $\frac{a+b+c}{8abc} \leq \frac{1}{abc}$
7 p	**TOTAL**

4. Fie ΔABC iar $M \in [AB]$; $N \in [AC]$; $C \in [BP]$ astfel încât $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{3}$; $\frac{NC}{NA} = \frac{2}{3}$; $\frac{PC}{PB} = \frac{2}{9}$. Să se arate că punctele M, N, P sunt coliniare.

Barem:

1p	
1 p	În $\Delta AMN \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$ $\quad \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\ \overrightarrow{AB}$
1 p	$\overrightarrow{AN} = \frac{3}{5}\ \overrightarrow{AC}$ $\quad \overrightarrow{MN} = -\frac{1}{4}\ \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\ \overrightarrow{AC}$
1 p	În $\Delta NCP \Rightarrow \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP}$ $\quad \overrightarrow{NC} = \frac{2}{5}\ \overrightarrow{AC}$
1 p	$\overrightarrow{CP} = -\frac{2}{7}\ \overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\ \overrightarrow{AC}$ $\quad \overrightarrow{NP} = -\frac{2}{7}\ \overrightarrow{AB} + \frac{24}{35}\ \overrightarrow{AC}$
1 p	$\overrightarrow{MN} = \alpha\, \overrightarrow{NP}$ $\quad \alpha = \frac{7}{8}$
1 p	$\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$ coliniari $\Longrightarrow$ M, N, P coliniare
7 p	**TOTAL**