



BAREM CLASA a-X-a

Olimpiada locala de matematică 24 februarie 2019

1.(7p) Să se rezolve ecuația

$$2^{x-1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 3$$

Soluție

$$x > 0, \frac{2^x}{2} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 3 \Leftrightarrow 2^x + 2 \cdot 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 6 \Leftrightarrow \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$2^x + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 6 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$6 = 2^x + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \geq 3 \sqrt[3]{2^x \cdot 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}}} = 3 \sqrt[3]{2^{x + \frac{2}{\sqrt{x}}}} \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$2 \geq \sqrt[3]{2^{x + \frac{2}{\sqrt{x}}}} \Leftrightarrow 2^3 \geq 2^{x + \frac{2}{\sqrt{x}}} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Dar } x + \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 3 \text{ pentru orice } x > 0 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Cu egalitate atunci când } x = 1 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

2.(7p) Să se arate că nu există funcție injectivă $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ care să satisfacă egalitatea

$$f(2^x) + f(7^x) = 9, \text{ pentru orice } x \text{ număr real.}$$

Soluție

$$\text{Presupunem că } f \text{ este injectivă} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Pentru } x=1 \rightarrow f(2) + f(7) = 9 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{Pentru } x = \log_2 7 \rightarrow f(2^{\log_2 7}) + f(7^{\log_2 7}) = 9 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$f(7) + f(7^{\log_2 7}) = 9 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{din cele 2 relații de mai sus avem ca } f(2) = f(7^{\log_2 7}) \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\text{și cum } f \text{ presupusă injectivă avem că } 2 = 7^{\log_2 7} \dots\dots\dots 1 \text{ p, contradicție} \dots\dots\dots 1 \text{ p.}$$

3.(7p) Numerele complexe z_1 si z_2 verifică relațiile $|z_1| = |z_2|$ si $3|z_1 + z_2| \geq |5z_1 + z_2|$

Demonstrați ca $z_1 = z_2$.

Solutie

Dacă $z_2=0$ atunci $|z_1| = 0 \rightarrow z_1 = 0$ și se verifică relatiia din enunț, deci $z_1=z_2=0$ 1 p

Dacă $z_2 \neq 0 \rightarrow \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 1$ si $3 \left| \frac{z_1}{z_2} + 1 \right| \geq \left| 5 \frac{z_1}{z_2} + 1 \right|$ 1 p

Pentru $z = \frac{z_1}{z_2} \rightarrow |z| = 1$ si $3|z + 1| \geq |5z + 1|$ 1 p

Ridicăm la pătrat și $(3z + 3)(3\bar{z} + 3) \geq (5z + 1)(5\bar{z} + 1)$ 1 p

Si cum $|z| = 1 \rightarrow 18 + 9z + 9\bar{z} \geq 26 + 5z + 5\bar{z}$ sau $z + \bar{z} \geq 2$ 1 p

Dacă $z = a + ib$, $a, b \in \mathbf{R}$ avem $a \geq 1$ 1 p

$|z| = 1 \rightarrow a^2 + b^2 = 1 \rightarrow a = 1$ și $b = 0 \rightarrow z = 1 \rightarrow z_1 = z_2$ 1 p

4.(7p) Să se determine numărul soluțiilor întregi ale inecuației $\log_{\frac{1}{2}}(x + 3) < 1 - x$.

Soluție

$x > -3$

Se obține $\log_2(x + 3) > x - 1 \Leftrightarrow 2^x < 2x + 6$ 1p

Se arată prin inducție că $2^x \geq 2x + 6, \forall x \geq 4, x \in \mathbb{N}$ 4p

Prin verificare se obține că $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, deci inecuația are 6 soluții.....2p