

Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a IX-a

1. a) Demonstrați egalitatea $[a] + \left[a + \frac{1}{2} \right] = [2a]$ (identitatea lui Hermite).

b) Rezolvați, în $\mathbb{R}$, ecuația $\left[\frac{6x+2}{3} \right] - \left[\frac{6x+5}{6} \right] = \frac{5x+3}{4}$.

prof. Călin Popescu

2. Arătați că $\frac{x^2-2x+5}{x-1} + \frac{y^2-2y+10}{y-1} + \frac{z^2-2z+17}{z-1} \geq 18, \forall x, y, z \in (1, +\infty)$.

prof. Călin Popescu

3. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir definit prin: $x_1 = \frac{1}{4}$ și $\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} = \frac{2}{n^2 + 2n}, \forall n \geq 1$.

Să se calculeze suma $S_n = \sum_{k=1}^n (2k+1)x_k$ și să se arate că $S_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

prof. Traian Tămâian

4. Fie ABCDE un pentagon convex și punctele P, Q astfel încât $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{CP}$ și $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CQ}$.

Dacă M, N sunt respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, BED, să se arate că patrulaterul MNPQ este paralelogram.

prof. Traian Tămâian

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

SUCCESE!

Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a IX-a

barem de corectare

		punctaj
1.	a. Demonstrarea identității	3p
	b. Se substituie $a = \frac{3x+1}{3}$, $a + \frac{1}{2} = \frac{3x+1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{6x+5}{6}$, $2a = \frac{6x+2}{3}$, iar ecuația devine $\left[\frac{3x+1}{3} \right] = \frac{5x+3}{4}$.	2p
	Se notează $\left[\frac{3x+1}{3} \right] = \frac{5x+3}{4} = k$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{4k-3}{5} \Rightarrow \left[\frac{12k-4}{15} \right] = k$	1p
	$\Rightarrow \frac{-19}{3} < k \leq \frac{-4}{3} \Rightarrow k \in \{-6, -5, -4, -3, -2\} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{-27}{5}, \frac{-23}{5}, \frac{-19}{5}, -3, \frac{-11}{5} \right\}$	1p
2.	$\frac{x^2-2x+5}{x-1} = \frac{(x-1)^2+2^2}{x-1} = x-1 + \frac{2^2}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1)\left(\frac{2^2}{x-1}\right)} = 4$	2p
	$\frac{y^2-2y+10}{y-1} = \frac{(y-1)^2+3^2}{y-1} = y-1 + \frac{3^2}{y-1} \geq 2\sqrt{(y-1)\left(\frac{3^2}{y-1}\right)} = 6$	2p
	$\frac{z^2-2z+17}{z-1} = \frac{(z-1)^2+4^2}{z-1} = z-1 + \frac{4^2}{z-1} \geq 2\sqrt{(z-1)\left(\frac{4^2}{z-1}\right)} = 8$	2p
	Prin adunare se obține inegalitatea cerută.	1p
3.	Considerând șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_n = \sqrt{x_n}$, $\forall n \geq 1$, relația de recurență dată devine $a_1 = \frac{1}{2}$ și $a_{n+1} + a_n = \frac{2}{n^2 + 2n}$, $\forall n \geq 1$.	1p
	Dând valori lui n obținem: $a_2 = \frac{2}{3} - a_1 = \frac{1}{2 \cdot 3}$, $a_3 = \frac{2}{8} - a_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3 \cdot 4}$.	1p

	Considerăm propoziția $P(n): a_n = \frac{1}{n(n+1)}, \forall n \geq 1$. Cum $P(1)$ este adevărată, presupunând $P(n)$ adevărată, rezultă: $a_{n+1} = \frac{2}{n(n+2)} - a_n = \frac{2}{n(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} \left(\frac{2}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{(n+1)(n+2)}$	1p
	$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \forall n \geq 1.$	1p
	Conform metodei inducției matematice rezultă că $a_n = \frac{1}{n(n+1)}, \forall n \geq 1$. Cum $a_k = \sqrt{x_k}, \forall k \geq 1$, rezultă că $x_k = a_k^2 = \frac{1}{k^2(k+1)^2}, \forall k \geq 1$.	2p
	$S_n = \sum_{k=1}^n (2k+1)x_k = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$	1p
4.	Fie O un punct în plan. Dacă M, N sunt respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, BED rezultă: $3 \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ și $3 \cdot \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD}$	2p
	Cum $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{CP}$ și $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CQ}$ rezultă că $\frac{PE}{PC} = \frac{QA}{QC} = 2$ și atunci $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{1+2}(\overrightarrow{OE} + 2\overrightarrow{OC}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OE} + 2\overrightarrow{OC} \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{1+2}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC}$	2p
	$3 \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$	1p
	$3 \cdot (\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$	1p
	$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OQ}, \text{ de unde rezultă că patrulaterul } MNPQ \text{ este paralelogram.}$	1p

Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a IX-a

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $|x^2 - 2020x + 2019| + |x - 1| - 2019|x - 2019| = 2019$

b) $[x + 2017] + \{x + 2018\} = [2019 + 2x]$, unde prin $[a]$ și $\{a\}$ am notat partea întreagă și respectiv partea fracționară a numărului real a .

Prof. Traian Tămâian

2. Să se determine $x, y \in (0, \infty)$ știind că $xy = 1$ și $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} = \sqrt{x+y}$.

Prof. Traian Tămâian

3. 1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, $y = f(x)$, astfel încât $y - 2019x \leq 0$ și

$$y - 2019x + 1 > 0.$$

a) Calculați

$$f\left(\frac{2018}{2019}\right)$$

b) Rezolvați ecuația $f(x) = 1 + 2 + 3 + \dots + 2019$

prof. Pop Marius

4. Fie ABCD un patrulater în care $CD \cap AB = \{E\}$ și $AD \cap BC = \{F\}$, $A \in [BE]$, $C \in [BF]$. Construim punctele $M \in (EA)$, $N \in (FC)$, $P \in (FD)$ și $Q \in (EC)$ astfel încât $\frac{EM}{AB} = \frac{FN}{BC} = \frac{FP}{AD} = \frac{EQ}{CD} = k > 0$. Demonstrați că punctele M, N, P și Q sunt vârfurile unui paralelogram.

prof. Fărcaș Mircea

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

SUCCESE!

Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a IX-a

barem de corectare

		punctaj
1.	a) Ecuația se scrie : $ x - 1 \cdot x - 2019 + x - 1 - 2019 x - 2019 - 2019 = 0 \Leftrightarrow$ $ x - 1 \cdot (x - 2019 + 1) - 2019(x - 2019 + 1) = 0 \Leftrightarrow$	2p
	$(x - 1 - 2019)(x - 2019 + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 2019 \Leftrightarrow x - 1 \in \{2019, -2019\},$ de unde $x \in \{-2018, 2020\}.$	1p
	b) Ecuația se scrie : $[x] + 2017 + \{x\} = 2019 + [2x] \Leftrightarrow x + 2017 = 2019 + [2x] \Leftrightarrow x = 2 + [2x] \Leftrightarrow$	2p
	$[2x + 2] = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2x + 2 < x + 1 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x + 2 < 1 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < -1 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$	1p
	$x \in [-2, -1) \cap \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -2.$ Mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{-2\}.$	1p
2.	Din $xy = 1$ rezultă $y = \frac{1}{x}$ și avem $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} = \sqrt{x+y} \Leftrightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \sqrt{x+\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{x+\frac{1}{x}} \quad (1)$	2p
	Din $xy = 1$ rezultă că $y = 1$. În concluzie numerele cerute sunt $x = y = 1$.	
	Cum $x + \frac{1}{x} \geq 2$, rezultă că $\sqrt{x + \frac{1}{x}} \geq \sqrt{2} \quad (2)$	2p
	Din (1) și (2) rezultă că $\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \geq \sqrt{2} \quad (3)$	
	Relația (3) se scrie echivalent $1 + \sqrt{x} \geq \sqrt{2(1+x)} \Leftrightarrow 1 + x + 2\sqrt{x} \geq 2 + 2x \Leftrightarrow 0 \geq 1 - 2\sqrt{x} + x \Leftrightarrow (1 - \sqrt{x})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = 1.$ Cum $x = 1$ verifică ecuația (1) rezultă că unica soluție a ecuației (1) este $x = 1$.	2p

	Din $xy = 1$ rezultă că $y = 1$. În concluzie numerele cerute sunt $x = y = 1$.	1p
3.	a) $y > 2019x - 1$ și $y \leq 2019x$ deci $2019x - 1 < y \leq 2019x$	1p
	folosind $x - 1 < [x] \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$ avem $2019x - 1 < f(x) \leq 2019x$ și $f(x) \in \mathbb{Z}$,	1p
	rezultă că $f(x) = [2019x], \forall x \in \mathbb{R}$	1p
	Deci $f\left(\frac{2018}{2019}\right) = [2018] = 2018$	1p
	$f(x) = 1 + 2 + 3 + \dots + 2019$ rezultă $f(x) = \frac{2019 \cdot 2020}{2} = 2019 \cdot 1010 \stackrel{1p}{\Leftrightarrow}$	1p
	$[2019x] = 2019 \cdot 1010 \Leftrightarrow \frac{2019 \cdot 1010}{2019} \leq x < \frac{2019 \cdot 1010 + 1}{2019} \stackrel{1p}{\Leftrightarrow}$	1p
	$1010 \leq x < 1010 \frac{1}{2019} \Leftrightarrow x \in \left[1010, 1010 \frac{1}{2019}\right)$	1p
4.	Avem $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EQ} = k(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC})$	2p
	$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NF} + \overrightarrow{FP} = k(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA})$	2p
	Știind că $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$	2p
	Rezultă $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$. Deci MNPQ este paralelogram.	1p



Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a X-a

1. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ cu proprietatea $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

Să se calculeze suma $z_1^{2019} + z_2^{2019} + z_3^{2019}$.

prof. Koczinger Éva

2. Aflați $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\sqrt[n]{17\sqrt{5} + 38} - \sqrt[n]{17\sqrt{5} - 38} = 4$.

prof. Popescu Călin

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(1 + \sqrt[3]{x}) = \log_2 \sqrt[6]{x}$.

prof. Galambosi Csaba

4. Pe laturile $(BC), (CD), (DA), (AB)$ ale patrulaterului convex $ABCD$ se consideră respectiv punctele A_1, B_1, C_1, D_1 astfel încât $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{B_1C}{B_1D} = \frac{C_1D}{C_1A} = \frac{D_1A}{D_1B}$. Dacă M, N, P, Q sunt respectiv mijloacele segmentelor $[AA_1], [BB_1], [CC_1], [DD_1]$, arătați că $MNPQ$ este paralelogram dacă și numai dacă $ABCD$ este paralelogram.

prof. Tămâian Traian

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

SUCCES!

Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a X-a

barem de corectare

		punctaj
1.	$ z =1 \Rightarrow z ^2=1 \Rightarrow z \cdot \bar{z}=1 \Rightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}$	2
	$(z_1-1) \cdot (z_2-1) \cdot (z_3-1) = z_1 z_2 z_3 - (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) + \underbrace{}_{-1}$ $= z_1 z_2 z_3 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) \right] = z_1 z_2 z_3 \cdot \left[1 - (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) \right] = z_1 z_2 z_3 \cdot \left[1 - \overline{z_1 + z_2 + z_3} \right] = 0$	3
	Cel puțin un factor este 0, de exemplu $z_3 = 1$, de unde rezultă că $z_1 + z_2 = 0 \Rightarrow z_2 = -z_1$, de unde obținem că suma căutată este 1.	2
2.	Se notează $x = \sqrt[3]{17\sqrt{5}+38}$ și se observă $x^{-1} = \sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}$.	2
	Se obține $x - \frac{1}{x} = 4$, cu soluțiile $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$ și cum $x > 0$, $x = 2 + \sqrt{5}$.	3
	Din $\sqrt[3]{17\sqrt{5}+38} = 2 + \sqrt{5}$ se obține $n = 3$.	2
3.	$\log_2 x = y \Rightarrow x = 2^y$	2
	$\log_5 \left(1 + 2^{\frac{y}{3}} \right) = \frac{y}{6}$	2
	$\left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{y}{6}} + \left(\frac{4}{5} \right)^{\frac{y}{6}} = 1$	2
	$y = 6$ sol. unică $\Rightarrow x = 64$	1
4.	Notând cu $k > 0$ valoarea comună a rapoartelor din ipoteză rezultă $a_1 = \frac{b+kc}{1+k}, b_1 = \frac{c+kd}{1+k}, c_1 = \frac{d+ka}{1+k}, d_1 = \frac{a+kb}{1+k}.$	2
	Cu acestea obținem: $m+p = \frac{a+a_1}{2} + \frac{c+c_1}{2} = \frac{a+\frac{b+kc}{1+k}}{2} + \frac{c+\frac{d+ka}{1+k}}{2}, \text{ de unde}$	3



$m + p = \frac{(a+c)(2k+1) + b + d}{2(1+k)} \quad (1)$ $n + q = \frac{b+b_1}{2} + \frac{d+d_1}{2} = \frac{b + \frac{c+kd}{1+k}}{2} + \frac{d + \frac{a+kb}{1+k}}{2}, \text{ de unde}$ $n + q = \frac{(b+d)(2k+1) + a + c}{2(1+k)} \quad (2)$	
Din relațiile (1) și (2) rezultă că $MNPQ$ este paralelogram dacă și numai dacă $m + p = n + q \Leftrightarrow (a+c)(2k+1) + b + d = (b+d)(2k+1) + a + c$ $\Leftrightarrow (a+c)2k = (b+d)2k \Leftrightarrow$ $a + c = b + d \Leftrightarrow ABCD \text{ este paralelogram.}$	2



Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a X-a

1. a) Demonstrați că pentru orice $x, y \in (0, \infty)$ are loc echivalența

$$\lg \frac{x+y}{2} = \frac{\lg x + \lg y}{2} \Leftrightarrow x = y$$

- b) Demonstrați că pentru orice $x, y \in (0, \infty)$ are loc echivalența

$$x^2 + y^2 = 2023xy \Leftrightarrow \lg \frac{x+y}{45} = \frac{\lg x + \lg y}{2}$$

prof. Forgács István

2. Fie $z, z' \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $|zz'| + zz' \neq 0$.

Să se arate că dacă $\frac{z+z'}{|zz'|+zz'} \in \mathbb{R}$, atunci $|z|=|z'|$ sau $\frac{z}{|z|} = \frac{z'}{|z'|}$.

prof. Pop Ovidiu

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 15^x + 30^x = 3^x + 6^x + 10^x$.

prof. Tămâian Traian

4. Pe laturile AB , BC și CA ale triunghiului ABC se construiesc, în exteriorul triunghiului, pentagoanele regulate $ABDEF$, $BCGHI$ și $CALKJ$. Notăm cu A_1 , B_1 și C_1 mijloacele segmentelor FL , DI și respectiv GJ . Arătați că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ au același centru de greutate.

prof. Braica Petru

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

SUCCESE!

Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a X-a

barem de corectare

		punctaj
1.	a. $\lg \frac{x+y}{2} = \frac{\lg x + \lg y}{2} \Leftrightarrow \lg \frac{x+y}{2} = \lg \sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y = 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow (x-y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$	4
	b. $\lg \frac{x+y}{45} = \frac{\lg x + \lg y}{2} \Leftrightarrow \lg \frac{x+y}{45} = \lg \sqrt{xy} \Leftrightarrow (x+y)^2 = 45^2 \cdot xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2023xy$	3
2.	Fie $ z' = r' > 0$ și $ z = r > 0$, de unde $\bar{z} = \frac{r^2}{z}$ și $\bar{z}' = \frac{r'^2}{z'}$. Atunci $\frac{z+z'}{rr'+zz'} \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $\frac{z+z'}{rr'+zz'} = \frac{\bar{z}+\bar{z}'}{rr'+\bar{z}\bar{z}'}$,	2
	echivalent cu $\frac{z+z'}{rr'+zz'} = \frac{\frac{r^2}{z} + \frac{r'^2}{z'}}{rr' + \frac{r^2}{z} \frac{r'^2}{z'}}$, echivalent cu $\frac{z+z'}{rr'+zz'} = \frac{r^2 z' + r'^2 z}{rr' z z' + r^2 r'^2}$, echivalent cu $rr' z^2 z' + r^2 r'^2 z + rr' z z'^2 + r^2 r'^2 z' = r^3 r' z' + r r'^3 z + r^2 z z'^2 + r'^2 z^2 z'$,	3
	echivalent cu $(r-r')(zz'+rr')(r'z-rz')=0$, de unde rezultă concluzia problemei.	2
3.	Ecuția se scrie succesiv $15^x + 30^x - 10^x = 3^x + 6^x - 2^x \Leftrightarrow 5^x(3^x + 6^x - 2^x) = 3^x + 6^x - 2^x \Leftrightarrow (5^x - 1)(3^x + 6^x - 2^x) = 0$ (1)	1
	Cazul 1. $5^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 5^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.	2
	Cazul 2. $3^x + 6^x - 2^x = 0 \Leftrightarrow 3^x + 6^x = 2^x \Leftrightarrow (\frac{3}{2})^x + (\frac{6}{2})^x = 1 \Leftrightarrow (\frac{3}{2})^x + (\frac{3}{1})^x = 1$ (2) Cum $(\frac{3}{2})^{-1} + (\frac{3}{1})^{-1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ rezultă că $x = -1$ este soluție a ecuației (1)	2
	Vom demonstra că $x = -1$ este unica soluție. Dacă $x > -1$ rezultă că $(\frac{3}{2})^x + (\frac{3}{1})^x > (\frac{3}{2})^{-1} + (\frac{3}{1})^{-1} = 1$. Dacă $x < -1$ rezultă că $(\frac{3}{2})^x + (\frac{3}{1})^x < (\frac{3}{2})^{-1} + (\frac{3}{1})^{-1} = 1$.	1
	Rezultă că $x = -1$ este soluție a ecuației (1). În concluzie mulțimea soluțiilor ecuației date este $S = \{0, -1\}$.	1



4.	Dacă notăm afixele punctelor astfel ca $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, ... $A_1(a_1)$ etc. și $\alpha=3\pi/5$, avem $f = a + (b - a) \cdot (\cos(-\alpha) + i \cdot \sin(-\alpha))$, $l = a + (c - a) \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$,	2
	$a_1 = \frac{f+l}{2} = a - a \cos \alpha + \frac{b(\cos \alpha - i \sin \alpha)}{2} + \frac{c(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{2}$ $b_1 = b - b \cos \alpha + \frac{c(\cos \alpha - i \sin \alpha)}{2} + \frac{a(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{2}$ $c_1 = c - c \cos \alpha + \frac{a(\cos \alpha - i \sin \alpha)}{2} + \frac{b(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{2}$	3
	Avem $a_1 + b_1 + c_1 = a + b + c$, de unde rezultă concluzia.	2



Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a XI-a

1. a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Dați exemplul de matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^4 + I_n = O_n$
b) Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $(AB)^2 = (BA)^2$. Să se arate că dacă $\text{Tr}(AB) \neq 0$ atunci $AB = BA$. Reciproca este adevărată?

prof. Petru Braica
prof. Ovidiu Pop

2. a) Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$. Arătați că $\det(A - xI_2) = x^2 - (\text{Tr}A)x + \det A$, pentru orice $x \in \mathbb{C}$.
b) Dacă $A \in M_2(\mathbb{C})$ cu $\text{Tr}A = 2$ și $\det A = 3$ demonstrați că
$$\sqrt{3 \cdot \det(A^2 + 3I_2)} - \sqrt{2 \cdot \det(A^2 + I_2)} = 2.$$

prof. Traian Tămâian

3. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir definit prin $a_1 = \sqrt{2}$ și $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
a) Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este monoton și $1 \leq a_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1)$.

prof. Traian Tămâian

4. a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^k x}{x^2}$, $k \in \mathbb{N}^*$.
b) Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 - \cos^2 x) \cdots (1 - \cos^n x)}{\sin^{2n} x + \ln(1 + x^{2n}) + \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - 1}$.

prof. Traian Tămâian

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

SUCCES!



Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a XI-a

Barem de corectare

	punctaj
1. a) $A^4 = -I_n$ Căutăm o matrice $A = \alpha I_n$, unde α este un număr complex.	1
Rezultă că $\alpha^4 = -1$	1
Un exemplu de matrice este $A = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i) I_n$	1
b) Orice matrice $X \in M_2(\mathbb{C})$ verifică ecuația $X^2 - \text{Tr}(X) \cdot X + (\det X) \cdot I_2 = O_2$ (1) Înlocuind în (1) pe X cu AB, respective BA, avem $(AB)^2 - \text{Tr}(AB) \cdot AB + \det(AB) \cdot I_2 = O_2$ (2) $(BA)^2 - \text{Tr}(BA) \cdot BA + \det(BA) \cdot I_2 = O_2$ (3)	2
Deoarece $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ și $\det(AB) = \det(BA)$, prin scăderea relațiilor (2) și (3) obținem $(AB)^2 - (BA)^2 = \text{Tr}(AB) \cdot (AB - BA)$ (4) Ținând seama că $(AB)^2 = (BA)^2$ și $\text{Tr}(AB) \neq 0$, din (4) rezultă că $AB = BA$.	1
Reciproca nu este adevărată. De exemplu pentru matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avem că $AB = O_2$, $(AB)^2 = O_2$, $BA = O_2$ și $(BA)^2 = O_2$, dar $\text{Tr}(AB) = 0$.	1
2. a) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Avem $\det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = x^2 - (a+d)x + ad - bc =$ $= x^2 - (\text{Tr} A)x + \det A$	3
b) Fie $f_A(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - (\text{Tr} A)x + \det A = x^2 - 2x + 3$ Din teorema Hamilton-Cayley rezultă: $A^2 - 2A + 3I_2 = O_2 \Leftrightarrow A^2 + 3I_2 = 2A$ (1) Din (1) rezultă $\det(A^2 + 3I_2) = \det(2A) = 2^2 \cdot \det A = 4 \cdot 3 = 12$.	2

	Am arătat că $\det(A^2 + 3I_2) = 12$ (2) Tot din (1) obținem: $A^2 + I_2 = 2(A - I_2)$ de unde rezultă $\det(A^2 + I_2) = 2^2 \cdot \det(A - I_2) = 2^2 \cdot f_A(1)$ și cum $f_A(1) = 2$ obținem $\det(A^2 + I_2) = 8$ (3) Din (2) și (3) obținem: $\sqrt{3 \det(A^2 + 3I_2)} - \sqrt{2 \cdot \det(A^2 + I_2)} = \sqrt{3 \cdot 12} - \sqrt{2 \cdot 8} = 6 - 4 = 2$.	2
3.	a) Pentru $\forall n \in N^*$ avem: $a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 - 3a_n + 2}{3} \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n - 1)(a_n - 2)}{3}$ (1)	1
	Vom demonstra prin inducție matematică propoziția: $P(n): 1 \leq a_n \leq 2, \forall n \in N^*$ (2) Cum $P(1)$ este adevărată, presupunând $P(n)$ adevărată avem: $1 = \frac{1+2}{3} \leq \frac{a_n^2 + 2}{3} \leq \frac{4+2}{3} = 2, \text{ de unde rezultă } 1 \leq a_{n+1} \leq 2, \forall n \in N^*.$ Deci $P(n) \Rightarrow P(n+1), \forall n \in N^*$ și conform metodei inducției matematice rezultă că $P(n)$ este adevărată $\forall n \in N^*$.	1
	Din (1) și (2) obținem $a_{n+1} - a_n \leq 0, \forall n \in N^*$ și rezultă că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este descrescător și deci este și monoton. Din (2) rezultă că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit.	1
	b) Conform teoremei lui Weierstrass rezultă că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și deci există $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda \in [1, 2]$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lambda$ și trecând la limită în relația din enunț obținem: $\lambda = \frac{\lambda^2 + 2}{3} \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0, \text{ de unde rezultă } \lambda \in \{1, 2\}.$ Cum $(a_n)_{n \geq 1}$ este descrescător și $\lambda \in \{1, 2\}$ rezultă că $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.	2
	Fie $L = \lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1)$. Aplicând teorema Cesaro-Stolz și folosind (1) rezultă $L = \lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_n - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_{n+1} - 1)(a_n - 1)}{a_n - a_{n+1}} =$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_{n+1} - 1)(a_n - 1)}{\frac{(a_{n+1} - 1)(a_n - 2)}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_{n+1} - 1) \cdot 3}{2 - a_n} = \frac{(1 - 1) \cdot 3}{2 - 1} = 0.$	2
4.	a) Avem $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^k x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x + \dots + \cos^{k-1} x)}{x^2} =$	1

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x + \cos^2 x + \dots + \cos^{k-1} x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot k = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \cdot k = 1$	1
$= 2k \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^2 = 2k \frac{1}{4} = \frac{k}{2}.$	1
b) Limita se scrie $L = \lim_{x \rightarrow 0} \prod_{k=1}^n \frac{1 - \cos^k x}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2n}}{\sin^{2n} x + \ln(1 + x^{2n}) + \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - 1} = L_1 \cdot L_2$ (1)	1
Avem $L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \prod_{k=1}^n \frac{1 - \cos^k x}{x^2} = \prod_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^k x}{x^2}.$ Folosind rezultatul de la a) rezultă $L_1 = \prod_{k=1}^n \frac{k}{2} = \frac{n!}{2^n}.$ (2)	1
Avem $L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2n}}{\sin^{2n} x + \ln(1 + x^{2n}) + \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - 1} =$ $= \frac{1}{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^{2n} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^{2n})}{x^{2n}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x^{2n})^{\frac{1}{n}} - 1}{x^{2n}}} = \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{n}} = \frac{n}{2n + 1}$ (3)	1
Din (1), (2) și (3) rezultă că $L = L_1 \cdot L_2 = \frac{n!}{2^n} \cdot \frac{n}{2n + 1}.$	1



Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a XI-a

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ și $t_n = \text{tr}(A^n)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demonstrați că $t_{n+2} = 7t_{n+1} - 10t_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{t_n}{5^n} \right)^{\frac{t_n}{2^n}}$.

prof. Galambosi Csaba

2. a) Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$. Arătați că $\det(A - xI_2) = x^2 - (\text{Tr}A)x + \det A$, pentru orice $x \in \mathbb{C}$.

b) Dacă $A \in M_2(\mathbb{C})$ cu $\text{Tr}A = 2$ și $\det A = 3$ demonstrați că $\det(A^4 + 4A^2 + 3I_2) = 96$.

prof. Traian Tămâian

3. a) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{10} + \frac{1}{1000} + \frac{9}{10000} + \dots + \frac{2}{10^{4n+1}} + \frac{1}{10^{4n+3}} + \frac{9}{10^{4n+4}} \right)$

b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} + \ln^4(1 + \sqrt{x}) - \sqrt[2020]{1 + \sin^2 x}}{x^2}$

prof. Papp Czier Levente

prof. Traian Tămâian

4. Fie șirul $a_n = \frac{(n+3)^2 + 3}{n(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ și funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(n) = \frac{nA+B}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{2^n}, A, B \in \mathbb{R}.$$

a) Determinați A și B astfel încât $a_n = f(n) - f(n+1)$, $n \in \mathbb{N}^*$

b) Dacă $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $n \in \mathbb{N}^*$, calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{n \cdot 2^n}$.

prof. Cziprok Andrei

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

SUCCES!



Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a XI-a

Barem de corectare

		punctaj
1.	a) Din Cayley-Hamilton $\Rightarrow A^2 - 7A + 10I_2 = O_2$	1
	$A^{n+2} = 7A^{n+1} - 10A^n \Rightarrow t_{n+2} = 7t_{n+1} - 10t_n$	2
	b) $t_{n+2} = 7t_{n+1} - 10t_n \Rightarrow t_n = 5^n + 2^n$	2
	Limita cerută este $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{t_n}{5^n} \right)^{\frac{t_n}{2^n}} = e$	2
2.	a) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(C)$. Avem $\det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = x^2 - (a+d)x + ad - bc = x^2 - (TrA)x + \det A$	3
	b) Fie $f_A(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - (TrA)x + \det A = x^2 - 2x + 3$ Din teorema Hamilton-Cayley rezultă: $A^2 - 2A + 3I_2 = O_2 \Leftrightarrow A^2 + 3I_2 = 2A$ (1) Din (1) rezultă $\det(A^2 + 3I_2) = \det(2A) = 2^2 \cdot \det A = 4 \cdot 3 = 12$. Am arătat că $\det(A^2 + 3I_2) = 12$ (2)	2
	Tot din (1) obținem: $A^2 + I_2 = 2(A - I_2)$ de unde rezultă $\det(A^2 + I_2) = 2^2 \cdot \det(A - I_2) = 2^2 \cdot f_A(1)$ și cum $f_A(1) = 2$ obținem $\det(A^2 + I_2) = 8$ (3) Din (2) și (3) obținem că $\det(A^4 + 4A^2 + 3I_2) = \det[(A^2 + I_2)(A^2 + 3I_2)] = \det(A^2 + I_2) \cdot \det(A^2 + 3I_2) = 8 \cdot 12 = 96$.	2
3.	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot 10^{4n+3} + 1 \cdot 10^{4n+1} + 9 \cdot 10^{4n} + 2 \cdot 10^{4n-1} + 1 \cdot 10^{4n-3} + 9 \cdot 10^{4n-4} + \dots + 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10 + 9}{10^{4n+4}} \right)$ = $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \cdot 10^3(10^{4n} + 10^{4n-4} + \dots + 1) + 10(10^{4n} + 10^{4n-4} + \dots + 1) + 9(10^{4n} + 10^{4n-4} + \dots + 1)}{10^{4n+4}} \right)$ =	2

	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2019 \cdot (10^{4n} + 10^{4n-4} + \dots + 1)}{10^{4n+4}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2019 \cdot \frac{10^{4n+4} - 1}{10^4 - 1}}{10^{4n+4}} \right)$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2019}{9999} \cdot \frac{10^{4n+4} - 1}{10^{4n+4}} \right) = 0, (2019)$	2
	Limita se scrie $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right]^4 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{2020}} - 1}{x^2} =$	2
	$= \ln e + 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{2020}} - 1}{\sin^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2 - \frac{1}{2020} = \frac{4039}{2020}$	1
4.	a) $a_n = f(n) - f(n+1)$ $\frac{(n+3)^2 + 3}{n(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{nA+B}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{2^n} - \frac{(n+1)A+B}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$	1
	Efectuând operațiile și utilizând metoda coeficienților nedeterminați obținem sistemul 	1
	$A=1$ și $B=3$	1
	b) $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n =$ $= f(1) - f(2) + f(2) - f(3) + \dots + f(n) - f(n+1)$	1
	$= 1 - \frac{n+4}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$	1
	$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{n \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n+4}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \right)^{n \cdot 2^n} = e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)n}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}}}$	1
	$= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$	1



Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a XII-a

1. Calculați :

$$\int \frac{\cos x}{3 \cdot \sin x - 4 \cdot \cos x + 5} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

prof. Cziprok Andrei, Colegiul Național „Kölcsey Ferenc” Satu Mare

2. Să se determine funcția derivabilă $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ care îndeplinește condițiile
 $xf(x) + x^2 f'(x) = x \ln x + x - 1, \forall x \in [1, +\infty)$ și $f(1) = 0$.

prof. Călin Popescu, Colegiul Național „Ioan Slavici”, Satu Mare

3.

Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ definit prin $I_1 = 0$ și $I_n = \int_1^n \frac{\arctg \frac{x}{\sqrt{n}}}{x^2 + n} dx, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Să se calculeze I_{2019} și să se demonstreze că $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} \cdot I_n) = \frac{\pi^2}{8}$.

prof. Traian Tămâian, Liceul Teoretic Carei

4. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit, cu un număr impar de elemente. Demonstrați că funcția $f: G \rightarrow G$,

$f(x) = x^2$ este bijectivă.

prof. Mircea Fărcaș, Colegiul Național „Mihai Eminescu”, Satu Mare.

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

SUCCES!



Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a XII-a

barem de corectare

	punctaj
1. Notăm cu $F = \int \frac{\cos x}{3 \cdot \sin x - 4 \cdot \cos x + 5} dx$ și $G = \int \frac{\sin x}{3 \cdot \sin x - 4 \cdot \cos x + 5} dx$	1p
Atunci $3F + 4G = \int \frac{3 \cdot \cos x + 4 \cdot \sin x}{3 \cdot \sin x - 4 \cdot \cos x + 5} dx = \ln 3 \cdot \sin x - 4 \cdot \cos x + 5 + C_1$.	1p
$3G - 4F + K = \int \frac{3 \cdot \sin x - 4 \cdot \cos x + 5}{3 \cdot \sin x - 4 \cdot \cos x + 5} dx = x + C_2$	1p
$K = \int \frac{5}{3 \cdot \sin x - 4 \cdot \cos x + 5} dx$ Utilizând $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = 2 \frac{1}{1+t^2} dt$	1p
Obținem $\int \frac{10}{9t^2 + 6t + 1} dt = -\frac{10}{9t+3} + C_3$, ca urmare $K = -\frac{10}{9 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3} + C_3$.	1p
Rezolvarea sistemului și finalizare(desfacerea modulului inclusiv) $F = \frac{3}{25} \ln (3 \cdot \sin x - 4 \cdot \cos x + 5) - \frac{4}{25} \cdot x - 4 \cdot \frac{10}{9 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3} + C$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	2p
2. Împărțind egalitatea dată cu x se obține: $f(x) + xf'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$	2p
$x'f(x) + xf'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$	2p

	$(xf(x))' = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$	
	$\int (xf(x))' dx = \int \ln x + 1 - \frac{1}{x} dx$ $xf(x) = (x-1)\ln x + C$	2p
	Substituind $x=1$ și ținând seama de egalitatea $f(1) = 0$, se obține $C = 0$, deci $f(x) = \frac{x-1}{x} \ln x.$	1p
3.	Făcând schimbarea de variabilă $x = \frac{n}{t}$, $dx = -\frac{n}{t^2} dt$, integrala se scrie $I_n = \int_n^1 \frac{\arctg(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{n}{t})}{\frac{n^2}{t^2} + n} \cdot (-\frac{n}{t^2}) dt = \int_1^n \frac{\arctg(\frac{\sqrt{n}}{t})}{t^2 + n} dt = \int_1^n \frac{\arctg(\frac{\sqrt{n}}{x})}{x^2 + n} dx.$	2p
	Dar $\arctg(\frac{\sqrt{n}}{x}) = \frac{\pi}{2} - \arctg(\frac{x}{\sqrt{n}})$, $\forall x \in (0, \infty)$ și rezultă că $I_n = \int_1^n \frac{\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{x}{\sqrt{n}}}{x^2 + n} dx = \frac{\pi}{2} \int_1^n \frac{1}{x^2 + n} dx - \int_1^n \frac{\arctg \frac{x}{\sqrt{n}}}{x^2 + n} dx = \frac{\pi}{2} \int_1^n \frac{1}{x^2 + n} dx - I_n, \text{ de unde}$ $I_n = \frac{\pi}{4} \cdot \int_1^n \frac{1}{x^2 + (\sqrt{n})^2} dx = \frac{\pi}{4\sqrt{n}} \cdot \arctg \frac{x}{\sqrt{n}} \Big _1^n \Leftrightarrow I_n = \frac{\pi}{4\sqrt{n}} \cdot (\arctg \sqrt{n} - \arctg \frac{1}{\sqrt{n}}) \quad (1)$	2p
	Cum $\arctg \sqrt{n} = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{\sqrt{n}}$, din (1) rezultă că $I_n = \frac{\pi}{4\sqrt{n}} \left(\frac{\pi}{2} - 2\arctg \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \Leftrightarrow I_n = \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \quad (2)$	1p
	Din (2) rezultă că $I_{2019} = \frac{\pi}{2\sqrt{2019}} \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{1}{\sqrt{2019}} \right)$	1p
	Tot din (2) rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} \cdot I_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{\pi^2}{8}.$	1p
4.	Deoarece G este mulțime finită, este suficient să se demonstreze că f este injectivă.	2p
	Fie $x, y \in G$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 = y^2$, echivalent cu $(x^2)^{-1} = (y^2)^{-1}$.	2p



	Dar $x^{2n+1} = y^{2n+1} = e$, unde $\text{card}G = 2n+1$ și e este elementul neutru al grupului.	1p
	Din $x^{2n+1} = y^{2n+1}$ și $(x^2)^{-1} = (y^2)^{-1} \Rightarrow x^{2n-1} = y^{2n-1}$ și inductiv se ajunge la $x = y$	2p



Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a XII-a

1. Calculați:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + 2019 \cdot \sin x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

prof. Forgács István, Colegiul Național „Kölcsey Ferenc”, Satu Mare

2. Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ derivabilă, care are o primitivă F care satisface relația:

$$2 \cdot (F(x) - f(x)) = f^2(x) \quad \forall x > 0.$$

a) Să se arate că f este strict crescătoare și convexă pe $(0, \infty)$.

b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.

prof. Kóczinger Éva, Liceul Teologic Romano-Catolic „Hám János”, Satu Mare

3.

Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ definit prin $I_1 = 0$ și $I_n = \int_1^n \frac{\ln x}{x^2 + n} dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Să se calculeze I_{2019} și să se demonstreze că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n} I_n \right) = \frac{\pi}{4}$.

prof. Traian Tămâian, Liceul Teoretic Carei

4.

Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ. Funcția $f: G \rightarrow G$ verifică egalitatea $f(x \cdot f(y)) = y \cdot f(x), \quad \forall x, y \in G$ dacă și numai dacă $f^2 = 1_G$ și f este endomorfism al grupului $(G, \cdot)$.

prof. dr. Ovidiu Pop, Colegiul Național „Mihai Eminescu”, Satu Mare.

Notă: Timp de lucru 3 ore.

Rezolvarea fiecărei probleme este obligatorie.

SUCCES!

Olimpiada națională de matematică

etapa locală, 16.02.2019

Clasa a XII-a

barem de corectare

		punctaj
1.	Notăm cu $I = \int \frac{\sin x}{\cos x + 2019 \cdot \sin x} dx, J = \int \frac{\cos x}{\cos x + 2019 \cdot \sin x} dx.$	1p
	Avem $2019I + J = x + C$	2p
	respectiv $-I + 2019J = \ln \cos x + 2019 \sin x + C$	2p
	Rezolvând sistemul de ecuații: $(-2019^2 - 1)I = -2019x + \ln(\cos x + 2019 \cdot \sin x) + C.$ $\Leftrightarrow I = \frac{1}{(-2019^2 - 1)}(-2019x + \ln(\cos x + 2019 \cdot \sin x) + C).$	2p
2.	F primitivă a lui f rezultă că F este derivabilă pe $(0, \infty)$ și $F'(x) = f(x) \forall x > 0$	1p
	Din relația dată obținem prin derivare $f(x) - f'(x) = f(x) \cdot f'(x), x > 0$, adică $f'(x) = \frac{f(x)}{1 + f(x)} > 0, x > 0$ de unde rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $(0, \infty)$	2p
	Din $f''(x) = \frac{f'(x)}{(1 + f(x))^2} > 0 \forall x > 0$ rezultă că funcția f este convexă pe $(0, \infty)$	1p
	Fiindcă funcția este derivabilă și convexă $\stackrel{Jensen}{\Rightarrow} f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \forall x, x_0 \in (0, \infty) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$	2p
	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1 + f(x)} = 1$	1p
3.	Făcând schimbarea de variabilă $x = \frac{n}{t}, dx = -\frac{n}{t^2} dt$, integrala se scrie	1p

	$I_n = \int_1^n \frac{\ln \frac{n}{t}}{\frac{n}{t^2} + n} \cdot \left(-\frac{n}{t^2}\right) dt = \int_1^n \frac{\ln n - \ln t}{t^2 + n} dt = \int_1^n \frac{\ln n - \ln x}{x^2 + n} dx =$	
	$= \ln n \int_1^n \frac{1}{x^2 + n} dx - \int_1^n \frac{\ln x}{x^2 + n} dx = \ln n \cdot \int_1^n \frac{1}{x^2 + n} dx - I_n, \text{ de unde rezultă că}$ $I_n = \frac{\ln n}{2} \int_1^n \frac{1}{x^2 + n} dx = \frac{\ln n}{2} \int_1^n \frac{1}{x^2 + (\sqrt{n})^2} dx = \frac{\ln n}{2\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{n}} \Big _1^n.$	1p
	Rezultă că $I_n = \frac{\ln n}{2\sqrt{n}} (\operatorname{arctg} \sqrt{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}), \forall n \geq 2$ (1)	1p
	Cum $\operatorname{arctg} \sqrt{n} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}$, din (1) rezultă că $I_n = \frac{\ln n}{2\sqrt{n}} \left(\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \Leftrightarrow I_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \forall n \geq 2$ (2)	2p
	Din (2) rezultă că $I_{2019} = \frac{\ln 2019}{\sqrt{2019}} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2019}} \right).$	1p
	Tot din (2) rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n} I_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{\pi}{4}.$	1p
4.	Demonstrăm că dacă $f^2 = 1_G$ și f este endomorfism al grupului $(G, \cdot)$, atunci funcția f verifică egalitatea $f(x \cdot f(y)) = y \cdot f(x), \forall x, y \in G$. Avem $f(x \cdot f(y)) = f(x) \cdot f(f(y)) = f(x) \cdot 1_G(y) = f(x) \cdot y = y \cdot f(x)$, ceea ce trebuia demonstrat.	3p
	Demonstrăm că dacă $f(x \cdot f(y)) = y \cdot f(x), \forall x, y \in G$, atunci $f^2 = 1_G$ și f este endomorfism al grupului $(G, \cdot)$. Înlocuim în egalitatea $f(x \cdot f(y)) = y \cdot f(x), \forall x, y \in G$ pe x cu $x \cdot y$ și avem (1) $f(x \cdot y \cdot f(y)) = y \cdot f(x \cdot y), \forall x, y \in G.$	1p
	Pe de altă parte, folosind ipoteza și că $(G, \cdot)$ un grup comutativ, avem că $f(x \cdot y \cdot f(y)) = f(y \cdot x \cdot f(y)) = f(y \cdot f(y \cdot f(x))) = y \cdot f(x) \cdot f(y)$, adică	1p



	(2) $f(x \cdot y \cdot f(y)) = y \cdot f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in G.$	
	Din (1) și (2) obținem că $y \cdot f(x \cdot y) = y \cdot f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in G$, de unde $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in G$, adică f este endomorfism al grupului $(G, \cdot)$. Ținând seama că f este endomorfism al grupului $(G, \cdot)$, rezultă că $f(e) = e$, unde e este elementul neutru al grupului $(G, \cdot)$. Înlocuim în egalitatea din ipoteză pe x cu e și ținând seama că $f(e) = e$, rezultă că $f(e \cdot f(y)) = y \cdot f(e), \forall y \in G$, adică $f(f(y)) = y, \forall y \in G$, de unde $f^o f = 1_G$.	2p