

Olimpiada de matematică faza locală

21 februarie 2016

Soluții și bareme

Clasa a IX-a

1. a) Dați un exemplu de numere iraționale a, b , astfel încât numerele $a + b$ și ab să fie numere raționale nenule.
b) Fie a, b numere reale. Arătați că există un număr irațional c astfel încât numerele $a + c$ și $b + c$ să fie iraționale.

Soluție. a) Exemplu corect 4p

b) Presupunând contrariul, pentru orice x irațional, unul dintre numerele $a + x, b + x$ este rațional. Alegem x irațional și apoi perechile $(a + x, b + x), (a + 2x, b + 2x), (a + 3x, b + 3x)$. Cel puțin 2 perechi vor avea o aceeași componentă număr rațional. Prin scădere, deducem $x \in \mathbb{Q}$ sau $2x \in \mathbb{Q}$, absurd 3p

2. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu S_n suma primilor n termeni. Fie p, q numere naturale nenule, diferite. Știind că $S_p = q$ și $S_q = p$, calculați S_{p+q} .

Soluție. Un calcul direct arată că $S_p - S_q = (p - q) \frac{a_1 + a_{p+q}}{2}$ 3p

Deducem că $\frac{a_1 + a_{p+q}}{2} = -1$ 1p

și apoi că $S_{p+q} = \frac{1}{2} (p + q) (a_1 + a_{p+q}) = -(p + q)$ 3p

3. Vectorii $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}, \overline{v_4}$ au lungimile egale și suma zero. Arătați că sunt doi câte doi vectori opuși.

Soluție. Deoarece suma vectorilor este nulă, ei reprezintă laturile unui patrulater 3p

Deoarece au lungimi egale, patrulaterul este romb, laturile opuse fiind egale și paralele, de unde concluzia 4p

4. O dreaptă care trece prin centrul de greutate al triunghiului ABC intersectează laturile AB și AC în punctele M și N . Arătați că

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{AN}{NC} \geq 4.$$

Soluție. Dacă $MN \parallel BC$, atunci $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 2$ și inegalitatea devine egalitate 2p

Dacă nu, fie P intersecția dintre MN și BC și D mijlocul lui BC . Aplicând Menelaus în ABD și ACD obținem, prin însumare, $\frac{MB}{AM} + \frac{NC}{AN} = 1$ 3p

Inegalitatea cerută rezultă acum din inegalitatea mediilor 2p