

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - 17 februarie 2018

Clasa a IX- a

- BAREM DE CORECTARE -

SUBIECTUL I (7 puncte)

Să se determine numerele reale $x, y, z \in \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$ cu proprietatea că :

$$\frac{(x+1)^2}{y+z-1} + \frac{(y+2)^2}{z+x-2} + \frac{(z+3)^2}{x+y-3} = 18$$

Rezolvare :

$$y+z-1, z+x-2, x+y-3 > 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{y+z-1} + \frac{(y+2)^2}{z+x-2} + \frac{(z+3)^2}{x+y-3} \geq \frac{(x+y+z+6)^2}{2x+2y+2z-6} \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Notăm } x+y+z = S, S \in \left(\frac{9}{2}; \infty\right)$$

$$\frac{(S+6)^2}{2S-6} \leq 18 \Leftrightarrow (S-12)^2 \leq 0 \dots\dots\dots 2p$$

$$x+y+z = 12 \text{ și } \frac{x+1}{y+z-1} = \frac{y+2}{z+x-2} = \frac{z+3}{x+y-3} = \frac{S+6}{2S-6} = 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$x = 5, y = 4 \text{ și } z = 3 \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL II (7 puncte)

Considerăm șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 2$ și $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}, n \geq 1$. Să se calculeze

$$\sum_{k=1}^n \frac{3-a_k}{a_k-1}.$$

Rezolvare :

$$a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{4}{3}, a_4 = \frac{5}{4} \dots\dots\dots 1p$$

$$P(n) : a_n = 1 + \frac{1}{n}, n \geq 1 \text{ (demonstrația prin inducție) } \dots\dots\dots 3p$$

$$\frac{3-a_k}{a_k-1} = 2k-1 \dots\dots\dots 1p$$

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \dots\dots\dots 2p$$

SUBIECTUL III (7 puncte)

Arătați că ecuația $x^5 + y^7 = z^9$ are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor naturale nenule.



Rezolvare :

$$2^{35} + 2^{35} = 2^{36} \dots\dots\dots 2p$$

$$(2^7)^5 + (2^5)^7 = (2^4)^9 \Rightarrow \text{ecuația are o soluție } x = 2^7, y = 2^5, z = 2^4 \dots\dots\dots 2p$$

$$(2^7 \cdot n^{63})^5 + (2^5 \cdot n^{45})^7 = (2^4 \cdot n^{35})^9, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$$\text{ecuația are o infinitate de soluții pe } \mathbb{N}^* \dots\dots\dots 3p$$

SUBIECTUL IV (7 puncte)

Fie ABC un triunghi și A', B', C' picioarele bisectoarelor din A, B și C . Notăm cu G și G' centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și $A'B'C'$. Să se arate că dreptele GG' și BC sunt paralele dacă și numai dacă AB, BC, AC sunt în progresie geometrică.

Rezolvare :

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{b+c}; \overrightarrow{BB'} = \frac{c\overrightarrow{BC} + a\overrightarrow{BA}}{c+a}; \overrightarrow{CC'} = \frac{a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}}{a+b} \dots\dots\dots 1p$$

$$3\overrightarrow{G'G} + (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}) = \vec{0} \dots\dots\dots 2p$$

$$3\overrightarrow{G'G} = \left(\frac{c}{b+c} - \frac{b}{a+b}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{b}{b+c} - \frac{c}{c+a}\right)\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \dots\dots\dots 2p$$

$$G'G \parallel BC \Leftrightarrow \frac{b}{a+b} = \frac{a}{c+a} \Leftrightarrow a^2 = bc \dots\dots\dots 2p$$