



Olimpiada Națională de Matematică 2018

Etapa locală – Iași, 01 februarie 2018

CLASA A VI-A

Subiectul I

Aflați numărul $n \in \mathbb{N}^*$ știind că: $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n} = \frac{4036}{2019}$.

Subiectul II

Se consideră numerele $a = 4n + 5$ și $b = 2n + 1$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pentru $n = 3p + 2$, $p \in \mathbb{N}$, demonstrați că $[a, b] = a \cdot b$. ($[a, b]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b)
- Pentru $n \leq 2018$, aflați câte perechi de numere de forma anterioară **nu** sunt prime între ele?

Subiectul III

Pe o dreaptă d se consideră punctele $A_1, A_2, \dots, A_k$, $k \in \mathbb{N}$, în această ordine, astfel încât $A_1 A_k = 54 \text{ cm}$. Lungimile segmentelor $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_{k-1} A_k$ sunt egale sau cu 5 cm sau cu 11 cm . Arătați că există un segment de tip $A_i A_j$, $1 \leq i < j \leq k$, de lungime 27 cm .

Subiectul IV

Fie $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COA$ trei unghiuri proprii în jurul punctului O , cu interioarele disjuncte două câte două, care îndeplinesc condițiile: $\frac{m(\sphericalangle BOC)}{m(\sphericalangle AOB)} = \frac{25y}{13x}$ și $m(\sphericalangle COA) - m(\sphericalangle AOB) = (40z - 13x)^\circ$, unde x, y și z sunt numere naturale prime care verifică relația $13x + 25y + 40z = 360$. Dacă punctele M și N sunt situate în interiorul unghiului $\sphericalangle BOC$ astfel încât $\sphericalangle AOM$ și $\sphericalangle CON$ sunt unghiuri drepte, atunci demonstrați că bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle MON$ și $\sphericalangle COA$ sunt semidrepte opuse.

Timp de lucru: 2 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.