

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 25 IANUARIE 2014****Clasa a XI-a**

Problema 1. Fie A o matrice pătratică de ordin 3, cu toate elementele din mulțimea $\{-1, 1\}$.

- a) Determinați toate valorile posibile ale determinantului matricei A .
- b) Demonstrați că matricea A^n , $n \in \mathbb{N}^*$, are toate elementele nenule.

Problema 2. Fie $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A + B = I_3$ și $A^2 = A^3$. Să se arate că:

- a) $AB = BA$;
- b) $I_3 + AB$ este o matrice inversabilă.

Problema 3. Se consideră șirurile de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ și $(c_n)_{n \geq 1}$ definite prin: $a_1 > 0$, $b_1 > 0$,

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n, \quad c_n = \frac{a_n}{b_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- a) Să se arate că $|c_{n+1} - \sqrt{2}| = (\sqrt{2} - 1) \left| \frac{a_n - b_n \sqrt{2}}{a_n + b_n} \right|$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

Problema 4. Fie $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție crescătoare cu proprietatea că $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(2x) - f(x)) = 0$. Demonstrați că $\forall a \in (0, +\infty)$, există $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(ax) - f(x))$ și valoarea acestei limite este 0.

SUCCESE!

Baremul de notare este: Problema 1. a) 4 puncte; b) 3 puncte; Problema 2. a) 2 puncte; b) 7 puncte; Problema 3. a) 3 puncte; b) 4 puncte; Problema 4. 7 puncte.