

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 14 februarie 2025

Clasa a XII-a

1. Considerăm mulțimea $G = \{(a + b) + i(a - b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$.
- (a) Arătați că $2025 + i \in G$, dar $2024 + i \notin G$.
- (b) Arătați că G este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu înmulțirea.

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu elementul neutru e . Dacă G are cel puțin trei elemente, arătați că există $a, b \in G \setminus \{e\}$, $a \neq b$, astfel încât $ab = ba$.

Gazeta Matematică

3. Fie $m, n \in (1, \infty)$ și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pentru care $f(mx) = nf(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, iar $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{m+n}$. Calculați $\int_1^m f(x) dx$.

Gazeta Matematică, Supliment cu exerciții, enunț modificat

4. Fie $\alpha > 1$ și $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție continuă și descrescătoare, cu proprietatea că $f^\alpha(x) \geq f(x^\alpha)$, $\forall x \geq 0$. Demonstrați inegalitatea:

$$\left(\int_0^x f(t) dt \right)^\alpha \geq \int_0^{x^\alpha} f(t) dt, \quad \forall x \geq 0.$$

Romeo Ilie

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.