

Olimpiada Națională de Matematică - Clasa a XII-a
Etapa locală - Vaslui, 15 februarie 2015

1. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă și injectivă cu proprietatea că $f(1) = 1$. Demonstrați că, dacă există $x_0 \in (0, 1)$ astfel încât $f(x_0) \geq 2$, atunci $\int_0^1 \operatorname{arctg}(f(x))dx > \frac{3}{4}$.

Gazeta Matematică, enunț modificat

2. Fie $(G, \cdot)$ un grup și mulțimea $Z(G) = \{x \in G \mid xy = yx, (\forall) y \in G\}$. Dacă $x^2 = e$, pentru orice $x \in G \setminus Z(G)$, demonstrați că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

Gazeta Matematică

3. Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 1 + \{x\}(1 - \{x\})$ și $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, unde prin $\{x\}$ am notat partea fracționară a numărului real x .

a) Demonstrați că f admite primitive și că orice primitivă a sa este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

b) Să se arate că există $a \in \mathbf{R}$ astfel încât funcția $G : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $G(x) = F(x) - ax$ să fie periodică, având o perioadă egală cu 1.

4. Fie $f : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție pentru care mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ f(x) & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{R}^* \right\}$ este parte stabilă a mulțimii matricelor pătratice de ordin 2 în raport cu înmulțirea matricelor. Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup abelian izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale nenule.

Notă: 1. Timp de lucru 3 ore.

2. Fiecare subiect se notează de la 0p la 7p. Punctaj maxim 28p.