

Olimpiada de matematică – clasa a VII-a
etapa zonală – 8 februarie 2020

1. Fie $a = \sqrt{28} - \sqrt{72} + \sqrt{80}$, $b = -\sqrt{63} + \sqrt{162} - \sqrt{180}$ și
$$c = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{63}}.$$

Să se arate, că $a : b + c \in \mathbf{N}$.

2. Să se demonstreze că $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \frac{\sqrt{20}}{9} < 2$

3. Se dă trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $m(\angle A) = 90^\circ$ și $AB = AC$.
Dacă E este mijlocul segmentului BC , (CF este bisectoarea unghiului $\angle ACD$, $F \in (AD)$, $AE \cap BF = \{P\}$, demonstrați că:

- patrulaterul $AECF$ este trapez;
- punctul P este egal depărtat de vârfurile patrulaterului $ABCF$.

4. Pe un cerc de centru O se consideră punctele A, B, C și D în această ordine. Știm, că AC este diametru, iar punctele B și D sunt situate pe cerc astfel încât $\widehat{BC} \equiv \widehat{CD}$. Se consider $M \in CD$ și $N \in BC$ astfel încât $OM \parallel BC$ și $ON \parallel CD$. Demonstrați, că:

- $MN \perp AC$
- $ABCD$ este pătrat dacă și numai dacă $AC = 2 \cdot MN$

Matematika tantárgyverseny – VII. osztály
Területi szakasz – 2020. február 8.

1. Legyen $a = \sqrt{28} - \sqrt{72} + \sqrt{80}$, $b = -\sqrt{63} + \sqrt{162} - \sqrt{180}$ és
$$c = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{63}}.$$

Mutasd ki, hogy $a : b + c \in \mathbf{N}$.

2. Bizonyítsd be, hogy $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \frac{\sqrt{20}}{9} < 2$

3. Legyen $ABCD$ trapéz, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, $m(\angle A) = 90^\circ$ és $AB = AC$. Ha E a BC szakasz felezőpontja, (CF pedig az $\angle ACD$ szög szögfelezője, $F \in (AD)$, $AE \cap BF = \{P\}$, igazold, hogy:

- $AECF$ négyszög trapéz;
- a P pont egyenlő távolságra van az $ABCF$ négyszög csúcsaitól!

4. Az A, B, C és D pontok ebben a sorrendben az O középpontú körön vannak. Tudjuk, hogy az AC átmérő és a B és D pontok úgy helyezkednek a körön, hogy $\widehat{BC} \equiv \widehat{CD}$. Legyen $M \in CD$ és $N \in BC$ úgy, hogy $OM \parallel BC$ és $ON \parallel CD$. Bizonyítsd be, hogy:

- $MN \perp AC$
- az $ABCD$ négyzet akkor és csak akkor, ha $AC = 2 \cdot MN$