

# OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Faza locală

Braşov, 9 februarie 2024

Soluţii

Clasa a X-a

1. Fie numărul real  $a = \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^{2024}]{3}$ .

(a) Demonstraţi că  $[a] = 2$ , unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului  $a$ .

(b) Aflaţi cel mai mic număr  $n \in \mathbb{N}^*$ , pentru care  $a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot \dots \cdot a^n \in \mathbb{Q}$ .

\*\*\*

**Soluţie.**

(a) Demonstrăm  $2 \leq a < 3$ . Astfel, avem:

$$a = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{2024}}} > 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{4}} = 27^{\frac{1}{4}} > 16^{\frac{1}{4}} = 2 \dots \dots \dots \mathbf{2 \text{ puncte}}$$

$$a = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{2024}}} = 3^{1 - \frac{1}{2^{2024}}} < 3 \dots \dots \dots \mathbf{2 \text{ puncte}}$$

(b)  $x_n := a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot \dots \cdot a^n = a^{\frac{n(n+1)}{2}} = 3^{\frac{(2^{2024}-1)n(n+1)}{2^{2025}}} \dots \dots \dots \mathbf{1 \text{ punct}}$

$$x_n \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{(2^{2024}-1)n(n+1)}{2^{2025}} \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow 2^{2025} \text{ divide } n(n+1) \dots \dots \mathbf{1 \text{ punct}}$$

Cum  $n$  şi  $n+1$  sunt numere prime între ele, rezultă că  $2^{2025} | n$  sau  $2^{2025} | (n+1)$ .

Valoarea minimă a lui  $n$  pentru care  $x_n \in \mathbb{Q}$  este  $2^{2025} - 1 \dots \dots \dots \mathbf{1 \text{ punct}}$

2. Considerăm numerele complexe  $z_1, z_2, z_3$ , de modul egal cu 1, cu proprietatea că

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 z_3 = 1.$$

(a) Arătaţi că  $(1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3) = 0$ .

(b) Determinaţi tripletele  $(z_1, z_2, z_3)$  cu proprietatea din enunţ.

\*\*\*

**Soluţie.**

(a) Din ipoteză, rezultă  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \dots \dots \dots \mathbf{1 \text{ punct}}$   
şi  $(1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3) = 0 \iff z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = 1. \dots \dots \dots \mathbf{1 \text{ punct}}$

$$\text{Dar } z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 z_2 z_3} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 1.$$

Identitatea (a) este demonstrată.  $\dots \dots \dots \mathbf{2 \text{ puncte}}$

- (b) Din (a) rezultă că cel puțin un număr este egal cu 1. .... **1 punct**  
 Obținem  $\{z_1, z_2, z_3\} = \{1, i, -i\}$ . .... **2 puncte**

3. Fie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , definită prin  $f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

- (a) Arătați că  $f$  nu este surjectivă.  
 (b) Determinați  $m \in \mathbb{N}$  pentru care ecuația  $f(x) = m$  are soluție unică.  
 ( $[x]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $x$ )

Gazeta Matematică

### Soluție.

- (a)  $f$  este crescătoare ..... **1 punct**  
 $f(3) = 1$  și  $f(4) = 3$  ..... **1 punct**  
 Cum  $f$  este crescătoare,  $2 \notin \text{Im}(f)$ , deci  $f$  nu este surjectivă..... **1 punct**  
 (b) Orice  $n \in \mathbb{N}$  poate fi scris în forma  $n = 10k + r$ , unde  $n, k \in \mathbb{N}$ , cu  $0 \leq r \leq 9$ .  
 $f(10k + r) = \left\lfloor 5k + \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor 2k + \frac{r+1}{5} \right\rfloor = 7k + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+1}{5} \right\rfloor$  ..... **2 puncte**  
 Calculând  $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+1}{5} \right\rfloor$  pentru fiecare  $r \in \{0, 1, \dots, 9\}$ , se obțin, în ordine, rezultatele  $\{0, 0, 1, 1, 3, 3, 4, 4, 5, 6\}$  ..... **1 punct**  
 Deducem că ecuația  $f(x) = m$  are soluție unică dacă și numai dacă:  
 $m \in \{7k + 5 \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{7k + 6 \mid k \in \mathbb{N}\}$  ..... **1 punct**

4. Fie  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  o funcție surjectivă cu proprietatea

$$f(x + y) \geq f(x) + y, \text{ pentru oricare } x, y \geq 0.$$

Demonstrați că:

- (a)  $f$  este inversabilă;  
 (b)  $f^{-1}(x + y) \leq f^{-1}(x) + y$ , pentru oricare  $x, y \geq 0$ , unde  $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  este inversa funcției  $f$ .

Romeo Ilie

### Soluție.

- (a) Pentru orice  $y > 0$ , folosind ipoteza, avem

$$f(x + y) \geq f(x) + y > f(x), \forall x \geq 0.$$

Deducem că  $f$  este strict crescătoare, deci injectivă ..... **2 puncte**  
 În concluzie  $f$  este bijectivă, deci inversabilă ..... **1 punct**

- (b)  $f$  strict crescătoare implică  $f^{-1}$  strict crescătoare. .... **1 punct**  
 Fie  $x, y \geq 0$ . Folosind ipoteza, avem:

$$f(f^{-1}(x) + y) \geq f(f^{-1}(x)) + y = x + y.$$

..... **2 puncte**  
 Cum  $f(f^{-1}(x) + y) \geq x + y$  și  $f^{-1}$  crescătoare avem:

$$f^{-1}(f(f^{-1}(x) + y)) \geq f^{-1}(x + y),$$

de unde rezultă  $f^{-1}(x + y) \leq f^{-1}(x) + y$ . .... **1 punct**