

Barem clasa a XI-a

1. Prin trecere la determinanți, din relația dată, se obține că $\det(X) = \det(X^2)$ de unde $\det(X) \in \{0, 1\}$ 2p

Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $u = \text{Tr}(X) = a + d$.

Din relația Cayley-Hamilton se obține că $X^2 - uX + \det(X)I_2 = O_2$.

Deosebim cazurile:

1) $\det(X) = 0$ deci $X^2 = uX$.

Avem că $AX = uXA$ sau $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și se obține că

$\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$. Rezultă egalitățile $\begin{cases} c = bu \\ d = au \\ a = du \\ b = cu \end{cases}$. Adunând ecuațiile 2 și 3 se obține

că $u = u^2$ cu soluțiile $u \in \{0, 1\}$.

- Pentru $u = 0$ se obține că $a = b = c = d = 0$ și $X = O_2$.
- Pentru $u = 1$ se obține că $a = d = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ 2p

2) $\det(X) = 1$ deci $X^2 = uX - I_2 = \begin{pmatrix} ua-1 & ub \\ uc & ud-1 \end{pmatrix}$.

Avem că $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ua-1 & ub \\ uc & ud-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Rezultă egalitățile $\begin{cases} c = bu \\ d = au - 1 \\ a = du - 1 \\ b = cu \end{cases}$.

Adunând ecuațiile 2 și 3 se obține că $u^2 - u - 2 = 0$ cu soluțiile $u \in \{-1, 2\}$

- Pentru $u = 2$ se obține că $b = c = 0, a = d = 1$ și $X = I_2$.
- Pentru $u = -1$ se obține că $c = -b, d = -a - 1$ și $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a-1 \end{pmatrix}$. Din condiția

$\det X = 1$ rezultă că $b^2 = a^2 + a + 1$. Prin înmulțirea cu 4 rezultă că $4b^2 - (2a+1)^2 = 3$ sau $(2b-2a-1)(2b+2a+1) = 3$ cu soluțiile

$(a, b) \in \{(0, 1), (-1, 1), (-1, -1), (0, -1)\}$. Se obțin matricele din $M_2(\mathbb{Z})$

$X \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ 2p

Așadar $M = \left\{ O_2, I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ 1p

2. Caz 1) $a < b \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{a^2 + \frac{2014}{n} + \frac{1}{n^2}} - b + \frac{c}{n} \right) = \infty(a-b) = -\infty$ nu
convine.....1p

Caz 2) $a > b \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{a^2 + \frac{2014}{n} + \frac{1}{n^2}} - b + \frac{c}{n} \right) = \infty(a-b) = \infty$ nu convine.....1p

Caz 3) $a = b$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2 n^2 + 2014n + 1 - a^2 n^2 + 2acn - c^2}{\sqrt{a^2 n^2 + 2014n + 1} + an - c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(2014 + 2ac + \frac{1-c^2}{n} \right)}{n \left(\sqrt{a^2 + \frac{2014}{n} + \frac{1}{n^2}} + a - \frac{c}{n} \right)} = \frac{2014 + 2ac}{2a}$$
2p

$$\frac{2014 + 2ac}{2a} = \sqrt{\frac{2c}{a}} \cdot \sqrt{2014} \Leftrightarrow \frac{1007}{a} + c = 2\sqrt{\frac{1007}{a}} \cdot c \Leftrightarrow \frac{1007}{a} = c$$
1p

$ac = 1007$ și $a + c = 72 \Leftrightarrow (a = 53, c = 19)$ sau $(a = 19, c = 53)$1p

Rezultă două soluții $(a = 53, b = 53, c = 19)$, $(a = 19, b = 19, c = 53)$1p

3. Pentru $n = 1$ se obține $a_1 = 1$. Pentru $n \geq 2$ rezultă

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1^x + 2^x + \dots + n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{(2^x - 1) + \dots + (n^x - 1)}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1) + \dots + (n^x - 1)}{nx}} = e^{\frac{\ln 2 + \dots + \ln n}{n}} =$$

$$= e^{\ln \sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{n!} \text{ deci } a_n = \sqrt[n]{n!} \text{4p}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt[n]{n!}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n}{n \ln n} \text{ . Aplicând lema Stolz-Cesaro va}$$

rezulta $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n}{n \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1) \ln(n+1) - n \ln n} =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{n[\ln(n+1) - \ln n] + \ln(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln(n+1)} = 1 \text{3p}$$

4. a) $\det A = -a^2 \neq 0$, deci $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 2p

b) Dacă $A^{2014} = O_3$, ar rezulta $\det(A^{2014}) = 0$, adică $(\det A)^{2014} = 0$, deci $\det A = 0$ 2p

Atunci $-a^2 = 0$ deci $a = 0$ și $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2p

Calculând puterile lui A ar rezulta:

$A^2 = A, A^3 = A, \dots, A^n = A, \forall n \in N^*$, deci $A^{2014} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O_3$,
contradicție cu presupunerea făcută.1p