



Olimpiada Națională de Matematică 2017

Etapa locală – Iași, 24 februarie 2017

CLASA a VIII-a

1. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{1}{2x+3} - \frac{1}{3-2x} - \frac{2x+6}{4x^2-9} \right) \cdot \frac{4x^3+4x^2-9x-9}{x^2-2x+3}$, unde x este un număr real diferit de $-\frac{3}{2}$ și $\frac{3}{2}$.
 - a) Determinați numerele întregi a și b , știind că $E(x) = a + \frac{b}{x^2-2x+3}$, pentru orice număr real x , diferit de $-\frac{3}{2}$ și $\frac{3}{2}$.
 - b) Determinați valoarea minimă a expresiei $E(x)$, $x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}$.
2. Fie a și b două numere naturale astfel încât $a > 2b > 0$ și $x = \frac{\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}}$.
 - a) Arătați că $\frac{x+1}{x-1} = \sqrt{\frac{a+2b}{a-2b}}$.
 - b) Arătați că suma $bx^2 - ax + b$ are aceeași valoare pentru toate perechile de numere naturale (a, b) , cu $a > 2b > 0$.
 - c) Demonstrați că există o infinitate de perechi de numere naturale (a, b) , cu $a > 2b > 0$, pentru care numărul x este natural.
3. Se consideră o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu baza ABC , muchiile laterale AA', BB', CC' și $AB = 6$ cm, $AA' = 3$ cm. Fie M și N mijloacele laturilor BC , respectiv $B'C'$.
 - a) Calculați aria triunghiului $A'BC$.
 - b) Aflați distanța de la punctul N la planul $(A'BC)$.
 - c) Aflați tangenta unghiului determinat de planele (MNA') și $(MA'C')$.
4. Se consideră un cub $ABCD A'B'C'D'$ cu latura $AB = 4$ cm. Fie M și N mijloacele laturilor BC , respectiv DC .
 - a) Arătați că punctele M, N, D' și B' sunt coplanare.
 - b) Calculați aria patrulaterului $MND'B'$.
 - c) Demonstrați că centrul de greutate al triunghiului $C'BD$ aparține planului (MND') .

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.