



---

Olimpiada Națională de Matematică 2018

Etapă locală – Iași, 1 februarie 2018

CLASA A A XII-A

**Problema 1.**

a) **Calculați:**  $I = \int \frac{x^2 \sin x + 2x \cos x + \sin x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx;$

b) **Calculați:**  $J = \int \frac{3x^5 - 4x^3 + x}{(x^3 - x + 1)^{2018}} dx, x \in (0, \infty).$

**Problema 2.**

Fie  $G = \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) / A = \begin{pmatrix} x+y & y \\ z & x+z \end{pmatrix}, A^{-1} = A^t \right\}$ . Să se demonstreze că  $(G, \cdot)$  este grup, izomorf cu grupul lui Klein. (Cu  $A^{-1}$  este notată inversa matricei  $A$ , cu  $A^t$  este notată transpusa matricei  $A$ ).

**Problema 3.**

Fie  $A = \{ f / f : M \rightarrow M / f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in M \}$ , unde  $(M, \cdot)$  este un monoid comutativ finit cu elementul neutru  $e$ . Dacă pentru orice  $f \in A$ , avem  $f(e) = e$ , să se demonstreze că  $(M, \cdot)$  este grup.

**Problema 4.**

a) Există funcții continue  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , cu proprietatea :

$$f(x) + \int_0^1 (x^2 - z - 1) f(z) dz = x^2 - x + 1, \text{ pentru orice } x \in [0, 1] ?$$

b) Se consideră funcția  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabilă pe  $[0, 1]$ , cu derivata continuă, care are proprietatea:

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx = 1.$$

Să se demonstreze:  $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \geq 105.$

*Timp de lucru 3 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*

