OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16 februarie 2013

Clasa a VII- a

SUBIECTUL I (7p)

Fie numerele $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2011}{2012}$ şi $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2012}{2013}$.

a) Arătaţi că $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}, (\forall) n \in N, n \geq 2$;

b) Demonstraţi că $x < y$;

c) Aflaţi prima zecimală a lui x.

SUBIECTUL II (7p)

Fie n un număr natural nenul. Demonstraţi:

a) Dacă $\sqrt{n} \in \mathbf{Q}$ atunci $\sqrt{n} \in \boldsymbol{N}$;

b) $\sqrt{n^2+1} \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q}$;

c) Există o infinitate de numere $r \in \boldsymbol{Q}$ astfel încât $\sqrt{kr + 2012} \in \boldsymbol{Q}$ şi $\sqrt{kr + 2013} \in \boldsymbol{Q}$, unde $k \in \boldsymbol{Q}^*$ este dat.

SUBIECTUL III (7p)

Fie Mşi N mijloacele laturilor $[AD]$, respectiv $[DC]$ ale rombului $ABCD$ şi $BM \cap AC = \{P\}$, iar $BN \cap AC = \{T\}$.

a) Arătaţi că $MNTP$ este trapez isoscel;

b) Dacă $AN \cap BD = \{G\}$ şi $GP \perp AB$, demonstraţi că $ABCD$ este pătrat.

SUBIECTUL IV (7p)

În triunghiul ABC, $m(< ABC) = 2 \cdot m(< ACB)$ şi $AD \perp BC,\ (D \in BC)$. Punctele E şi C sunt situate de o parte şi de alta a dreptei AB astfel încât $BE \perp AE$ şi $< EAB \equiv < ACB$. Bisectoarea $< AED$ intersectează dreapta AC în M. Dacă $AE \cap BC = \{H\}$, arătaţi că:

a) Triunghiurile BHA şi AHC sunt isoscele;

b) $MCDE$ este paralelogram;

c) Perimetrul paralelogramului $MCDE$ este egal cu cel al triunghiului ABC.

Gazeta Matematică

Subiecte selectate şi prelucrate de prof. Daniel Poroşniuc

Notă:

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Timp de lucru: 3 ore**