

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019 –

CLASA A XII-A

Subiecte

1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea: $f(x) + f(-x) = x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Calculați:
$$I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{x^4 + 4} dx$$

Prof. Roxana Soare, Ploiești

2. Fie $G = (1, 3)$ și pentru orice $x, y \in G$ definim legea $x * y = \frac{2xy - 3x - 3y + 6}{xy - 2x - 2y + 5}$.

a) Arătați că G este parte stabilă în raport cu legea $*$;

b) Presupunând că $(G, *)$ este grup abelian, arătați că $(G, *) \cong (\mathbb{R}_+, \cdot)$.

3. Fie $(G, \circ)$ un grup finit. Notăm cu $O(G) = \{n \in \mathbb{N}^* / \exists x \in G \text{ cu } \text{ord } x = n\}$.

a) Găsiți grupurile G_1 abelian și G_2 neabelian astfel încât $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset O(G_1)$, respectiv

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset O(G_2);$$

b) Există G abelian cu $O(G) = \{1, 3, 5\}$? Dar G neabelian cu $O(G) = \{1, 3\}$?

Prof. Emil Vasile, Ploiești

4. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x t^2 e^{\frac{(x-t)(x+t)}{x^2}} dt$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$ și $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x^4(1+x^{2019})}$.

Arătați că:

a) f este o funcție impară și continuă;

b) Orice primitivă G a funcției g admite asimptotă orizontală.

Prof. Octavian Purcaru, Ploiești

Notă:

Timp de lucru : 3 ore. Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.