

Barem de corectare OLM 2015 Clasa a XI-a

1. a) Fie $\sigma \in H$; $\{\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \dots\} \subset H$. Cum S_n este finită, există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^k = e$ (4p)

b) $\sigma^k = e \Rightarrow \sigma^{-1} = \sigma^{k-1} \in H$ (3p)

2. a) Folosind $S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ (1p)

$\det A = \frac{2S^2}{abc} \left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right) \geq 0$ (4p)

b) Egalitatea are loc în triunghiul echilateral(2p)

3. a) $x_{n+1} - x_n = (1 + x_n)^2 \geq 0$, deci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ crescător(1p)

Orice șir monoton are limită, deci $x_n \rightarrow l, l \in \overline{\mathbb{R}}$ (1p)

Trecând la limită în relația de recurență se obține $l = l + \infty$ (1p)

(SAU se poate folosi inducția pentru a arăta ca $x_n > n$)

b) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{x_n} + x_n + 3 \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{x_n}{x_{n+1}} \rightarrow 0$ (1p)

$\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow +\infty \Rightarrow \sqrt[n]{x_n} \rightarrow +\infty$ (1p)

Se aplică Lema lui Stoltz și se obține $\frac{n}{x_n} \rightarrow 0$ (2p)

4.a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_2(x) = +\infty$, deci nu există asimptote orizontale(1p)

$y = -2x - \frac{3}{2}$ asimptotă oblică spre $-\infty$ (1p)

$y = 2x + \frac{3}{2}$ asimptotă oblică spre $+\infty$ (1p)

b) $\lim_{x \searrow 0} \left(\sqrt{\frac{x^2+x}{x}} + \sqrt{\frac{x^2+2x}{x}} + \dots + \sqrt{\frac{x^2+px}{x}} \right)^2 = (1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{p})^2$ (2p)

$(1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{p})^2 = 1 + 2 + \dots + p + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} \sqrt{ij} \leq \frac{p(p+1)}{2} + \sum_{1 \leq i < j \leq p} (i+j) = \frac{p^2(p+1)}{2}$ (2p)

(Inegalitatea se poate dovedi și cu metoda inducției matematice.)