



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ – 25 IANUARIE 2014

Clasa a XII-a

Problema 1 a) Fie $(G, \cdot)$ un grup și e elementul său neutru. Elementele $a, b \in G$ satisfac condiția: $a^2 = b^2 = (ab)^2$. Să se arate că $a^4 = b^4 = e$.

b) Dacă $(A, +, \cdot)$ este un inel necomutativ și $a, b \in A$ au proprietate $a^2 + b^2 = ab$, atunci să se demonstreze că $(ab)^2 = b^2 a^2$ și $(ba)^2 = a^2 b^2$.

((A, +, \cdot) este un inel necomutativ dacă pe mulțimea A sunt definite legile de compoziție „+” și „\cdot” cu proprietățile: (A, +) este grup comutativ, (A, \cdot) este monoid necomutativ și $a(b+c) = ab+ac$, $(b+c)a = ba+ca$; $\forall a, b, c \in A$.)

Problema 2. Fie p un număr prim de forma $4k+3$, $k \in \mathbb{N}$.

- a) Să se arate că nu există $x \in \mathbb{Z}_p$ astfel încât $x^2 + \hat{1} = \hat{0}$ (în $\mathbb{Z}_p$).
- b) Să se arate că dacă $x^2 + y^2 = \hat{0}$, $x, y \in \mathbb{Z}_p$, atunci $x = \hat{0}$ și $y = \hat{0}$.
- c) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $x^2 + y^2 = 12005$.

Problema 3. Dacă $x \in (0, \infty)$ calculați:

- a) $\int \frac{1}{x(x^{2014} + 1)} dx;$
- b) $\int \frac{1}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx.$

Problema 4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive. Să se arate că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x| f(x)$ admite primitive.

Gazeta matematică

SUCCES!

Baremul de notare este: **Problema 1.** a) 4 puncte; b) 3 puncte; **Problema 2.** a) 2 puncte; b) 2 puncte; c) 3 puncte; **Problema 3.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 4.** 7 puncte.