

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 8.02.2025

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII – a

Problema 1. Fie $M(x) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2x+3 & -x & -x \\ -x & 2x+3 & -x \\ -x & -x & 2x+3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, unde $x \in \mathbb{R}$ și mulțimea $G = \{M(x) \mid x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$.

a) Să se arate că G are o structură de grup abelian în raport cu operația de înmulțire a matricelor;

b) Să se calculeze P^n pentru $n \in \mathbb{N}^*$, unde $P = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Barem de corectare. Dacă notăm $A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, atunci $M(x) = I_3 + x \cdot A$, pentru

orice $x \in \mathbb{R}$. Cum $A^2 = A$, obținem că $M(x) \cdot M(y) = M(x + y + xy) = M((x+1)(y+1) - 1)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ (2p)

a) Dacă $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, atunci $M(x) \cdot M(y) = M((x+1)(y+1) - 1) \in G$. Deoarece $M(x) \cdot M(y) = M(y) \cdot M(x) = M(x + y + xy)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, înmulțirea matricelor este asociativă, elementul neutru este $I_3 = M(0) \in G$, iar $M(x)^{-1} = M\left(\frac{1}{x+1} - 1\right) \in G$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, rezultă că $(G, \cdot)$ este un grup abelian. (3p)

b) Inductiv se demonstrează că $M(x)^n = M((x+1)^n - 1)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$. Așadar, $P^n = M(6)^n = M(7^n - 1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (2p)

Problema 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup și mulțimea $Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx, \forall g \in G\}$. Să se arate că:

a) $Z(G)$ este un subgrup al lui G ;

b) dacă $x^2 = e$, pentru orice element $x \in G \setminus Z(G)$, atunci grupul G este comutativ.
(cu e s-a notat elementul neutru al grupului G)

Barem de corectare.

a) Evident, dacă $g \in G$, atunci $eg = ge = g$, adică $e \in Z(G)$. Dacă $x, y \in Z(G)$, atunci pentru orice $g \in G$, avem $(xy)g = x(yg) = x(gy) = (xg)y = (gx)y = g(xy)$, respectiv $xg = gx \Leftrightarrow gx^{-1} = x^{-1}g$, adică $xy, x^{-1} \in Z(G)$ (3p)

b) Fie $x, y \in G$.

Dacă $x \in Z(G)$ sau $y \in Z(G)$, atunci $xy = yx$ (1p)

Presupunem acum că $x, y \notin Z(G)$. Dacă $xy \in Z(G)$, atunci $(xy)y = y(xy) \Leftrightarrow xy^2 = yxy \Leftrightarrow xy = yx$, respectiv dacă $xy \notin Z(G)$, atunci $(xy)^2 = x^2 = y^2 = e$, de unde $(xy)^2 = x^2y^2 \Leftrightarrow xyxy = x^2y^2 \Leftrightarrow yx = xy$ (3p)

Problema 3. Să se calculeze:

$$a) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(4 - \sin^2 x)(1 + 2^x)} dx;$$

$$b) \int \frac{x^3 - 1}{x^6 + 4x^3 + 2025x^2 + 4} dx, \quad x \in (0, +\infty).$$

Barem de corectare. Notăm cu I integrala de la punctul a). Avem

$$a) \text{ Din } I \stackrel{-x=t}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2^t \cos t}{(4 - \sin^2 t)(1 + 2^t)} dx \stackrel{\text{not.}}{=} J, \text{ rezultă că } I + J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4 - \sin^2 x} dx = \frac{\ln 3}{2}, \text{ de unde}$$

$$I = J = \frac{\ln 3}{4} \dots \dots \dots (4p)$$

$$b) \int \frac{x^3 - 1}{x^6 + 4x^3 + 2025x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)'}{\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^2 + 2025} dx = \frac{1}{90} \operatorname{arctg} \frac{x^2 + \frac{2}{x}}{45} + c \dots \dots \dots (3p)$$

Problema 4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că

$$f(x) = 2(1 + x^2) \cdot \left(1 + \int_0^x \frac{f(t)}{1 + t^2} dt\right), \quad \text{pentru fiecare } x \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că:

a) funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$;

b) există o singură funcție f care satisface condiția din enunț. Să se determine această funcție.

Barem de corectare. a) Considerăm funcția $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $h(x) = \frac{f(x)}{1 + x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Cum f este continuă, rezultă că și funcția h este continuă, deci admite primitive. Dacă $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a lui h , atunci relația din enunț se poate scrie echivalent $f(x) = 2(1 + x^2) \cdot (1 + H(x) - H(0))$. Așadar, deoarece funcția H este derivabilă pe $\mathbb{R}$, rezultă că și f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ (4p)

b) Din $h(x) = 2(1 + H(x) - H(0))$, rezultă că $h'(x) = 2 \cdot h(x)$, de unde $h(x) = c \cdot e^{2x}$. Cum $h(0) = 2$, se obține că $h(x) = 2 \cdot e^{2x}$, adică $f(x) = 2(1 + x^2) \cdot e^{2x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (3p)

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.