



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală - SĂLAJ -11.02.2023
BAREM DE NOTARE

Clasa a VIII-a

Subiectul 1

a) Calculați: $A = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{(\sqrt{3} - 3)^2}$

b) Fie $B = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1$, unde $x \in \mathbb{Z}$. Arătați că B este pătrat perfect.

a) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$1p

$\sqrt{(\sqrt{3} - 3)^2} = |\sqrt{3} - 3| = 3 - \sqrt{3}$ 1p

$A = 2 - \sqrt{3} - (3 - \sqrt{3}) = -1$ 1p

b) Notăm: $x^2 + 5x + 4 = a$, $a \in \mathbb{Z}$1p

$B = a \cdot (a + 2) + 1 = a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$, revenim la notație2p

$B = (x^2 + 5x + 5)^2 \Rightarrow B$ este pătrat perfect1p

Subiectul 2

a) Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \in [1, 5]$. Arătați că $a^2 - 6a + 5 \leq 0$

b) Aflați partea întreagă a numărului $\frac{a-5}{4}$.

a) Din $a \in [1, 5]$ unde obținem că $1 \leq a \leq 5 \Rightarrow 0 \leq a - 1 \leq 4$, pozitiv.....1p

$1 \leq a \leq 5 \Rightarrow -4 \leq a - 5 \leq 0$, negativ.....1p

$(a - 1)(a - 5) \leq 0$ de unde $a^2 - 6a + 5 \leq 0$2p

b) $a \in [1, 5]$ de unde obținem că $1 \leq a \leq 5$ și că $-4 \leq a - 5 \leq 0$

$-1 \leq \frac{a-5}{4} \leq 0$1p

Partea întreagă a numărului $\frac{a-5}{4}$ este :

-1 dacă $a \in [1, 5)$ 1p

și 0 dacă $a = 5$1p

Subiectul 3

Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara $PD, P \notin (ABC)$. Dacă $AM \perp PB, CN \perp PB$, unde $M, N \in PB, MN = 3 \text{ cm}, AB = 8 \text{ cm}, BC = 4 \text{ cm}$, calculați:

- Lungimea segmentului PB ;
- Tangenta măsurii unghiului planelor (ABC) și (APC) .

$$a) PD \perp (ABCD), DC \perp BC \xRightarrow{T3 \perp} PC \perp BC, PD \perp (ABCD), PD \perp DA, DA \perp AB \Rightarrow PA \perp AB \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{În } \triangle PCB \text{ dreptunghic, aplic. T. catetei} \Rightarrow BC^2 = BN \cdot PB \Rightarrow 16 = BN \cdot PB \Rightarrow BN = \frac{16}{PB} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{În } \triangle PAB \text{ dreptunghic, aplic. T. catetei} \Rightarrow AB^2 = BM \cdot BP \Rightarrow 64 = BM \cdot BP \Rightarrow BM = \frac{64}{PB}.$$

$$\text{Obținem } BM - BN = \frac{64}{PB} - \frac{16}{PB} = 3 \Rightarrow \frac{48}{PB} = 3 \Rightarrow PB = 16 \dots\dots\dots 2p$$

$$b) m(\angle (ABC), (PAC)) = m(\angle (DE, PE)) = m(\angle DEP)$$

$$\triangle ABC \text{ dreptunghic} \xRightarrow{T.P.} AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC = 4\sqrt{5}$$

$$\triangle PDB \text{ dreptunghic} \xRightarrow{T.P.} PD^2 = PB^2 - BD^2 = 256 - 80 = 176 \Rightarrow PD = 4\sqrt{11}; DE = \frac{AD \cdot DC}{AC} = \frac{4 \cdot 8}{4\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \dots\dots 2p$$

$$\text{tg}(\angle DEP) = \frac{PD}{DE} = \frac{4\sqrt{11}}{\frac{8\sqrt{5}}{5}} = 4\sqrt{11} \cdot \frac{5}{8\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{55}}{2} \dots\dots\dots 1p$$

Subiectul 4

Fie un triunghi dreptunghic ABC cu $\angle A = 90^\circ$; $AB = 3 \text{ cm}$ și $AC = 4 \text{ cm}$. Fie de asemenea un punct S care nu aparține planului (ABC) așezat în spațiu astfel încât planele $(SAB), (SAC), (SBC)$ să formeze cu planul (ABC) unghiuri congruente cu măsura 60° .

Să se calculeze

- Distanța de la punctul S la planul (ABC) .
- Ariile triunghiurilor SAB, SBC, SAC .

$$a) SP \perp (ABC), PE \perp AB, PF \perp AC, PT \perp BC \Rightarrow SF \perp AC, ST \perp BC \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Obține } \angle SPE \equiv \angle SPF \equiv \angle SPT \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Deduce } P \text{ centrul cercului înscris în } \triangle ABC \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Scrie } A[ABC] = A[APB] + A[BPC] + A[CPA] \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Obține } r = 1, d(S, (ABC)) = \sqrt{3} \dots\dots\dots 1p$$

$$b) \text{Obține } SE = 2 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Obține } A[SAB] = 3, A[SBC] = 5, A[SAC] = 4 \dots\dots\dots 1p$$