

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală -17.02.2018
Clasa a XII-a M2

Subiectul I (7 puncte)

Fie mulțimea $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a > 0 \right\}$.

a) Arătați că $A(a) \cdot A(b) = A(a \cdot b)$, $\forall A(a), A(b) \in M$.

b) Calculați $A^{2018}(2)$.

Subiectul II (7 puncte)

Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = 2xy - 10(x + y) + 55$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Aflați elementul neutru al legii.

b) Calculați $x^{(2018)} = \underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de 2018 ori}}$.

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x * x * x = x$.

Subiectul III (7 puncte)

Se consideră funcția $f : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$

a) Să se calculeze $\int_2^e \left(f(x) - \frac{1}{x-1} \right) dx$.

b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_2^x f(t) dt$

c) Să se determine $a > 2$ astfel încât $\int_2^a f(x) dx = \ln 3$.

Subiectul IV (7 puncte)

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = xe^x$.

a) Să se determine $\int_0^1 f(x) e^{-x} dx$.

b) Să se arate că $\int_0^1 f''(x) dx = 2e - 1$, unde f'' este derivata a doua a funcției f .

c) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx$.

Notă: Timp de lucru 3 ore. Fiecare subiect se notează cu 7 puncte. Nu se acordă puncte din oficiu.

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapa locală -17.02.2018****Clasa a XII-a M2****Barem**

1. a) Calcul direct $A(a)A(b)=A(ab)$, $ab>0$4p
 b) Folosind pct a), $A^{2018}(2)=A(2^{2018})$3p
2. a) $e = \frac{11}{2} \in \mathbb{R}$ 2p
 b) $x^{(2018)} = 2^{2017} (x-5)^{2018} + 5$ 2p
 c) $x * x * x = 4(x-5)^3 + 5$ 1p
 Soluțiile ecuației sunt $x_1 = 5, x_2 = \frac{11}{2}, x_3 = \frac{9}{2} \in \mathbb{R}$ 2p
3. a) $\int_2^e \left(f(x) - \frac{1}{x-1} \right) dx = \int_2^e \frac{1}{x} dx = \ln e - \ln 2 = 1 - \ln 2$ 1p.
 b) $\int_2^x f(t) dt = \int_2^x \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} \right) dt = \ln x + \ln(x-1) - \ln 2$2p
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_2^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + \ln(x-1) - \ln 2}{x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x-1)}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 2}{x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} = 0$2p
 (s-a aplicat l'Hospital)
 c) $\int_2^a f(x) dx = \ln a + \ln(a-1) - \ln 2 = \ln \frac{a(a-1)}{2}$
 $\ln \frac{a(a-1)}{2} = \ln 3 \Leftrightarrow a^2 - a - 6 = 0$, cu rădăcinile $a_1 = 3 \in (2, \infty)$
 și $a_2 = -2$ care nu este din intervalul $(2, \infty)$. Așadar $a = 3$2p
4. a) $\int_0^1 f(x)e^{-x} dx = \int_0^1 x e^x e^{-x} dx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$2p..
 b) $\int_0^1 f''(x) dx = f'(1) - f'(0) = 2e - 1$2p
 c) $u = x^2$
 $I = e^u/2$2p
 $I = \int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx = \frac{s-1}{2}$1p.