OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2020
Soluţii

Clasa a V-a

1. Arătaţi că dacă numărul $\overline{abcab}$ dă restul 9 la împărţirea cu 91, atunci cel puţin o cifră a sa este 1.

***

Soluţie.
$\overline{abcab} = 91p + 9,\ p \in \mathbb{N}$. .... **2 puncte**
$\overline{abcab} = 1001\overline{ab} + 100c$. .... **2 puncte**
$91(11\overline{ab} + c) + 9(c - 1) = 91p$. .... **2 puncte**
91 divide $c - 1 \ \Rightarrow\ c = 1$. .... **1 punct**

2. Fie numărul $N = 17 + 17^2 + 17^3 + ... + 17^{2020}$.

   (a) Demonstraţi că N este divizibil cu 18.

   (b) Determinaţi ultima cifră a numărului N.

Aurel Aldea

Soluţie.

(a) Grupând câte doi termenii sumei, obţinem
$N = (17+17^2)+(17^3+17^4)+...+(17^{2019}+17^{2020}) = 18(17+17^3+...+17^{2019})$,
deci N se divide cu 18. .... **3 puncte**

(b) Ultima cifră a numărului $1 + 17 + 17^2 + 17^3$ este 0. .... **2 puncte**
$N = 17(1 + 17 + 17^2 + 17^3) + ... + 17^{2017}(1 + 17 + 17^2 + 17^3)$. .... **1 punct**
Rezultă că ultima cifră a numărului N este 0. .... **1 punct**

3. Fie numerele $A = 2^{4037} + 2^{2020} + 2$ şi $B = 2^{2018} + 1$.

   (a) Arătaţi că B divide A.

   (b) Este A pătrat perfect?

Adriana Caţaron

Soluţie.

(a) $A = \left(2^{2018} + 1\right)\left(2^{2019} + 2\right)$, deci $B|A$. .... **4 puncte**

(b) $A = 2 \cdot \left(2^{2018} + 1\right) \cdot \left(2^{2018} + 1\right) = 2 \cdot B^2$. .... **2 puncte**
B este impar, deci A nu este pătrat perfect. .... **1 punct**

4. (a) Există numere naturale x şi y pentru care $x^4 + y^4 = 2019^{2020} + 3$?

   (b) Există numere naturale x, y, z, t pentru care $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 2018^{2021}$?

Gazeta Matematică

Soluţie.

(a) Notăm cu $u(a)$ ultima cifră a numărului natural a, scris în baza 10.
Avem $u(x^4) \in \{0, 1, 5, 6\},\ x \in \mathbb{N}$. .... **1 punct**
Rezultă $u(x^4 + y^4) \in \{0, 1, 2, 5, 6, 7\},\ x, y \in \mathbb{N}$. .... **1 punct**
Dar $u(2019^{2020} + 3) = 4$. .... **1 punct**
Deci nu există numere naturale x şi y cu proprietatea din enunţ. ... **1 punct**

(b) Exemplu:
$2018^{2021} = 2018 \cdot 2018^{2020} = (6^4 + 5^4 + 3^4 + 2^4) \cdot (2018^4)^{505} =$
$= (6 \cdot 2018^{505})^4 + (5 \cdot 2018^{505})^4 + (3 \cdot 2018^{505})^4 + (2 \cdot 2018^{505})^4$ **3p**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2020
Soluţii

Clasa a VI-a

1. Se consideră x, y, z şi t numere raţionale strict pozitive, astfel încât:

$$\frac{4x+3y+2z-t}{4t}=\frac{4y+3z+2t-x}{4x}=\frac{4z+3t+2x-y}{4y}=\frac{4t+3x+2y-z}{4z}.$$

Arătaţi că

$$\frac{(4x+3y+2z)(4y+3z+2t)(4z+3t+2x)(4t+3x+2y)}{xyzt}=9^4.$$

***

Soluţie.
Din ipoteză rezultă $\frac{4x+3y+2z}{4t}=\frac{4y+3z+2t}{4x}=\frac{4z+3t+2x}{4y}=\frac{4t+3x+2y}{4z}$ .... **2 puncte**
Notăm cu a valoarea comună a rapoartelor de mai sus. Atunci

$$\begin{aligned}4x+3y+2z &= at\\ 4y+3z+2t &= ax\\ 4z+3t+2x &= ay\\ 4t+3x+2y &= az\end{aligned}$$

.... **2 puncte**
Prin adunarea relaţiilor obţinem $9(x+y+z+t)=a(x+y+z+t)$.
Rezultă $a=9$. .... **2 puncte**
Astfel, $\frac{(4x+3y+2z)(4y+3z+2t)(4z+3t+2x)(4t+3x+2y)}{xyzt}=9^4$. .... **1 punct**

2. Fie numerele naturale a, b, c, d, astfel încât:

$$\begin{aligned} a &= \underbrace{2019202020192020...20192020}_{2024 \text{ cifre}} \\ b &= \underbrace{2020201920202019...20202019}_{2024 \text{ cifre}} \\ c &= \underbrace{201920202021201920202021...201920202021}_{2028 \text{ cifre}} \\ d &= \underbrace{202120202019202120202019...202120202019}_{2028 \text{ cifre}} \end{aligned}$$

Arătaţi că:

(a) Numerele 2019, 2020, 2021 nu sunt pătrate perfecte, dar 2025 este pătrat perfect.

(b) Produsul $b \cdot c$ nu este pătrat perfect.

(c) Produsul $a \cdot b \cdot c \cdot d$ nu este pătrat perfect.

Dorina Rapcea

Soluţie.

(a) $44^2 = 1936 < 2019 < 2020 < 2021 < 2025 = 45^2$.
Rezultă că numerele 2019, 2020, 2021 nu sunt pătrate perfecte. ... **2 puncte**

(b) Notăm cu $S(x)$ suma cifrelor numărului natural x (scris în baza 10).
b este format prin "alipirea" de 2024:8=253 ori a numărului $m = 20202019$.
$S(b) = 253 \cdot S(m) = 253 \cdot 16$, deci b nu este divizibil cu 3. .... **1 punct**
c este format prin "alipirea" de 2028:12=169 ori a numărului $n = 201920202021$.
$S(c) = 169 \cdot S(n) = 169 \cdot 21$, deci c este divizibil cu 3, dar nu este divizibil cu 9. .... **1 punct**
Rezultă că $b \cdot c$ este divizibil cu 3, dar nu este divizibil cu 9.
Atunci $b \cdot c$ nu este pătrat perfect. .... **1 punct**

(c) Numerele b, c şi d nu se divid cu 5, iar numărul a se divide cu 5, dar nu se divide cu 25.
Rezultă că $a \cdot b \cdot c \cdot d$ nu este pătrat perfect. .... **2 puncte**

3. Fie k un număr natural nenul şi mulţimile $A = \{k, k+1, k+2, ..., 8k\}$, $B = \{4k, 6k, 8k\}$. Arătaţi că oricare ar fi mulţimile X şi Y, cu $X, Y \subset A$, $X \cup Y = A$ şi $X \cap Y = \emptyset$, există $x \neq y$, cu $x, y \in X$ sau $x, y \in Y$, astfel încât $x + y \in B$.

Gazeta Matematică

Soluţie.
$\{k, 3k, 5k\} \subset A$. .... **2 puncte**
$k + 3k = 4k \in B,\ k + 5k = 6k \in B,\ 3k + 5k = 8k \in B$. .... **3 puncte**
Una dintre mulţimile X şi Y conţine cel puţin două dintre numerele $k, 3k, 5k$, de unde concluzia. .... **2 puncte**

4. Fie unghiul propriu $\widehat{AOB}$ şi punctele M în interiorul unghiului $\widehat{AOB}$ şi N în exteriorul unghiului $\widehat{AOB}$, astfel încât B se află în interiorul unghiului $\widehat{MON}$. Dacă $(OP$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOM}$, măsura unghiului $\widehat{POB}$ este de $60°$ şi măsura unghiului $\widehat{BOM}$ este de două ori mai mare decât măsura unghiului $\widehat{BON}$, arătaţi că bisectoarea unghiului $\widehat{AOP}$ este perpendiculară pe ON.

***

Soluţie.
Fie $(OQ$ bisectoarea unghiului $\widehat{AOP}$ (Q aflat în interiorul unghiului $\widehat{AOP}$).
Notăm $a = m(\widehat{AOQ})$ şi $b = m(\widehat{BON})$.
Avem $m(\widehat{AOP}) = m(\widehat{POM}) = 2a$. .... **2 puncte**
$m(\widehat{MOB}) = 2b$ .... **1 punct**
$60° = m(\widehat{POB}) = m(\widehat{POM}) + m(\widehat{MOB}) = 2a + 2b = 2(a + b)$.
Rezultă $a + b = 30°$. .... **2 puncte**
Atunci $m(\widehat{QON}) = m(\widehat{QOP}) + m(\widehat{POB}) + m(\widehat{BON}) = a + 60° + b = 90°$.
Rezultă $OQ \perp ON$. .... **2 puncte**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2020
Soluţii

Clasa a VII-a

1. Fie numerele $x = 1 + \sqrt{3} + \sqrt{3^2} + ... + \sqrt{3^{2020}}$ şi $y = 3^{1011} - \sqrt{3}$. Calculaţi partea întreagă a numărului $\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{y}{x}$.

Ioana Maşca

Soluţie.
Notăm $q = \sqrt{3}$.
Avem $x = \frac{q^{2021}-1}{q-1}$ .... **2 puncte**
şi $y = q^{2022} - q = q\left(q^{2021} - 1\right)$. .... **2 puncte**
Atunci
$$\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{y}{x} = \frac{4}{q} \cdot q\left(q^{2021} - 1\right) \cdot \frac{q-1}{q^{2021} - 1} = 4(q - 1).$$
. ... **1 punct**
Din inegalitatea $\frac{9}{4} < 3 < \frac{49}{16}$ obţinem $\frac{3}{2} < q < \frac{7}{4}$, de unde $2 < 4(q - 1) < 3$.
Rezultă $\left[\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{y}{x}\right] = 2$. .... **2 puncte**

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

(a) $\left|x - \frac{3}{2}\right| + |x - 1| = x - 2$.

(b) $\left[x - \frac{3}{2}\right] + [x - 1] = x - 2$.

***

Soluţie.

(a) Dacă $\left|x - \frac{3}{2}\right| + |x - 1| = x - 2$, atunci $x \geq 2$. .... **1 punct**
Fie $x \geq 2$. Ecuaţia devine $\left(x - \frac{3}{2}\right) + (x - 1) = x - 2$.
Dar soluţia $x = \frac{1}{2}$ nu aparţine intervalului $[2, \infty)$. .... **2 puncte**

(b) Dacă $\left[x - \frac{3}{2}\right] + [x - 1] = x - 2$, atunci $x \in \mathbb{Z}$. .... **2 puncte**
Fie $x \in \mathbb{Z}$. Ecuaţia devine $(x-2)+(x-1) = x-2$. Soluţia: $x = 1$. ... **2 puncte**

3. În trapezul $ABCD$, $AB \| CD$, $AB = 10$ cm, $CD = 5$ cm, $AC = 9$ cm şi $BD = 12$ cm, iar $AC \cap BD = \{O\}$.

   (a) Arătaţi că triunghiul AOB este dreptunghic şi calculaţi aria trapezului $ABCD$.

   (b) Arătaţi că centrul cercului circumscris triunghiului OAB, centrul cercului circumscris triunghiului OCD şi punctul O sunt coliniare.

Ioana Ciocîrlan

Soluţie.

(a) Fie $\{E\} = AD \cap BC$.
În triunghiul ABE, CD este linie mijlocie, deoarece $CD \parallel AB$ şi $CD = AB/2$.
Rezultă că O este centrul de greutate al triunghiului ABE. .... **1 punct**
Obţinem $AO = \frac{2}{3}AC = 6$ cm şi $BO = \frac{2}{3}BD = 8$ cm .... **1 punct**
Atunci $AO^2 + OB^2 = AB^2$, deci triunghiul AOB este dreptunghic în O, conform reciprocei teoremei lui Pitagora. .... **1 punct**
Trapezul $ABCD$ este ortodiagonal. $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = 54$ cm^2. .... **1 punct**

(b) Centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic AOB este mijlocul M al laturii $[AB]$. .... **1 punct**
Fie $\{N\} = EM \cap DC$. În triunghiul AEM, DN este linie mijlocie. Atunci $DN = AM/2 = AB/4 = DC/2$. Astfel, N este mijlocul lui $[DC]$, deci este centrul cercului circumscris triunghiului COD. O este centrul de greutate al triunghiului ABE, iar $[EM]$ este mediană, deci $O \in EM$.
În concluzie, punctele M, N şi O sunt coliniare. .... **2 puncte**

4. Se consideră triunghiul echilateral ABC. Pe semidreapta $(BA$, cu originea în B, se consideră un punct M astfel încât $BM > AB$, iar pe semidreapta $(CA$, cu originea în C, se consideră un punct N, astfel încât $CN > CA$. Ştiind că $BM = AN$, iar Q este simetricul lui M faţă de CN, arătaţi că $CMNQ$ este romb.

Gazeta Matematică. Supliment cu Exercitii

Soluţie.
Paralela prin M la BC intersectează dreapta CN în P. Triunghiul AMP este echilateral. Atunci $PN = AN - AP = BM - AM = AB = AC$, $PM = AM$ şi $m(\widehat{MPN}) = 120° = m(\widehat{MAC})$. Rezultă $\Delta MPN \equiv \Delta MAC$ (LUL), de unde $MN = MC$. .... **4 puncte**
CN este mediatoarea segmentului MQ. Rezultă $NQ = NM$ şi $CQ = CM$.
Ca urmare, patrulaterul $CMNQ$ este romb. .... **3 puncte**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Faza locală
Braşov, 21 februarie 2020
Soluţii

Clasa a VIII-a

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $[2019x]+\{2020x\}=2020$. Am notat cu $[a]$ partea întreagă numărului real a şi cu $\{a\}$ partea fracţionară a numărului a.

Ioana Ciocirlan

Soluţie.
Dacă $[2019x]+\{2020x\}=2020$, atunci $\{2020x\}\in\mathbb{Z}$, deci $\{2020x\}=0$.
Rezultă că există $k\in\mathbb{Z}$ astfel încât $2020x=k$, sau $x=\frac{k}{2020}$. .... **3 puncte**
Ecuaţia devine $\left[2019\cdot\frac{k}{2020}\right]=2020$. Atunci $2020\le 2019k/2020<2021$, de unde $2021+1/2019\le k<2022+2/2019$. Obţinem $k=2022$. Prin urmare ecuaţia are soluţia unică $x=\frac{2022}{2020}$. .... **4 puncte**

2. Fiind date numerele $A=2^{2n+1}+2^{n+1}+1$ şi $B=2^{2n+1}-2^{n+1}+1$, $n\in\mathbb{N}$. Arătaţi că:

   (a) $\sqrt{A+B}\notin\mathbb{Q}$, pentru orice număr natural n;

   (b) unul şi numai unul dintre numerele A şi B este divizibil cu 5, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

Dorina Rapcea

Soluţie.

(a) $A+B=\left(2^{n+1}\right)^2+2$.
$\left(2^{n+1}\right)^2<\left(2^{n+1}\right)^2+2<\left(2^{n+1}+1\right)^2,\ \forall\ n\in\mathbb{N}$.
Rezultă că $A+B$ nu este pătrat perfect, fiind încadrat de două pătrate perfecte consecutive. Atunci $\sqrt{A+B}\notin\mathbb{Q}$, $\forall\ n\in N$. .... **3 puncte**

(b) $A\cdot B=\left(2^{2n+1}+1\right)^2-\left(2^{n+1}\right)^2=4^{2n+1}+1=(5-1)^{2n+1}+1=\mathcal{M}_5$.
Deci $A\cdot B$ este divizibil cu numărul prim 5. Atunci $5|A$ sau $5|B$.
Dar $A-B=2^{n+2}$ nu este divizibil cu 5. Rezultă că unul şi numai unul dintre numerele A şi B se divide cu 5, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$. .... **4 puncte**

3. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ şi punctele M şi N mijloacele muchiilor BC, respectiv VD. Arătaţi că $AB = AV$, dacă şi numai dacă măsura unghiului dintre dreptele AB şi MN este egală cu $30°$.

Gazeta Matematică

Soluţie.
Notăm $AB = 2a$, $VA = 2b$ şi $m(\widehat{AB, MN}) = \alpha$.
Fie P şi Q mijloacele muchiilor AD, respectiv VC. Din teorema liniei mijlocii, rezultă că patrulaterul $MPNQ$ este un trapez isoscel, cu bazele $MP = 2a$, $NQ = a$ şi laturile neparalelele $MQ = PN = b$. .... **2 puncte**
Deoarece $PM \parallel AB$, avem $m(\widehat{PMN}) = m(\widehat{AB, MN}) = \alpha$. .... **1 punct**
Fie $NR \perp MP$, $R \in MP$.
În trapezul isoscel $MPNQ$, obţinem $MR = \frac{3a}{2}$ şi $NR = \frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}$. .... **1 punct**
Atunci: $\alpha = 30° \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{3a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = b$.
În concluzie, $AB = AV$ dacă şi numai dacă $m(\widehat{AB, MN}) = 30°$. .... **3 puncte**

4. Se consideră tetraedrul $ABCD$ în care $AD \perp (BCD)$, iar $AD^2 = BD^2 + CD^2$. Fie E şi F proiecţiile lui D pe AB, respectiv pe AC.

(a) Ştiind că $EF \cap (BCD) = \{P\}$ astfel încât $BC = 3CP$, aflaţi raportul dintre arie triunghiului AEF şi aria triunghiului ABC.

(b) Arătaţi că există un punct $O \in (BCD)$, egal depărtat de punctele B, C, D, E şi F.

Dorina Rapcea

Soluţie.
(a) Notăm $BD^2 = x$ şi $CD^2 = y$. Conform ipotezei, $AD^2 = x + y$.
$AD \perp (BCD) \Longrightarrow AD \perp BD$ şi $AD \perp CD$
Aplicând teorema catetei în triunghiurile dreptunghice ΔABD şi ΔACD, obţinem $\frac{EA}{EB} = \frac{x+y}{x}$ şi $\frac{FA}{FC} = \frac{x+y}{y}$. $P \in (ABC) \cap (BCD) = BC$. Cum $BC = 3CP > CP$ şi $P \notin [BC]$, avem $C \in (BP)$ şi $\frac{PC}{PB} = \frac{1}{4}$.
În ΔABC, aplicând teorema lui Menelaus pentru transversala $E - F - P$, obţinem $\frac{EB}{EA} \cdot \frac{FA}{FC} \cdot \frac{PC}{PB} = 1$, deci $\frac{x}{x+y} \cdot \frac{x+y}{y} \cdot \frac{1}{4} = 1$, de unde $\frac{y}{x} = \frac{1}{4}$.
Atunci $\frac{EA}{EB} = 1 + \frac{y}{x} = \frac{5}{4}$ şi $\frac{FA}{FC} = \frac{x}{y} + 1 = 5$. .... **2 puncte**
Rezultă $\frac{EA}{AB} = \frac{5}{9}$ şi $\frac{FA}{AC} = \frac{5}{6}$.
Raportul ariilor este $\frac{\mathcal{A}_{AEF}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF \cdot \sin \widehat{EAF}}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC}} = \frac{25}{54}$........................ **2 puncte**

(b) Fie O centrul cercului circumscris triunghiului BCD şi M mijlocul muchiei BD. Din $OM \perp BD$ şi $OM \perp AD$ ($AD \perp (BCD)$, $OM \subset (BCD)$), rezultă $OM \perp (BDE)$. M este centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic BDE. Ca urmare, $OB = OE = OD$. Analog demonstrăm $OC = OF = OD$. Rezultă că $O \in (BCD)$ este egal depărtat de punctele B, C, D, E şi F. .... **3 puncte**