

Soluții și bareme orientative

Clasa a X-a

Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. a) $3(|z|^2 + |u|^2 + |w|^2) = 3(z\bar{z} + u\bar{u} + w\bar{w})$ (1p)

$$|z - u|^2 + |u - w|^2 + |w - z|^2 = (z - u) \cdot \overline{(z - u)} + (u - w) \cdot \overline{(u - w)} + (w - z) \cdot \overline{(w - z)} = 2(z\bar{z} + u\bar{u} + w\bar{w}) - \bar{z}(u + w) - \bar{u}(w + z) - \bar{w}(z + u) = 3(z\bar{z} + u\bar{u} + w\bar{w}).$$
 (3p)

b) $3|z| = |z - u + z - w| \leq |z - u| + |z - w|,$

$3|u| = |u - z + u - w| \leq |u - z| + |u - w|$

$3|w| = |w - z + w - u| \leq |w - z| + |w - u|.$ (2p)

Prin adunarea celor trei inegalități obținem concluzia. (1p)

2. a) Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$. Rezultă $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$, deci:

$x_1 = f(f(x_1)) - f(x_1) = f(f(x_2)) - f(x_2) = x_2$, deci f este injectivă. (2p)

Pentru $x = 0$ în relația din enunț se obține $f(f(0)) = f(0)$ și din injectivitate rezultă că $f(0) = 0$. (1p)

b) Se aplică principiul inducției matematice. Fie

$P(n): f^{[1]} + f^{[2]} + \dots + f^{[n]} = f^{[n+2]} - f^{[2]}, n \in \mathbb{N}^*.$

I. Etapa de verificare:

$P(1): f(x) = f(f(f(x))) - f(f(x)).$

În relația din ipoteză facem substituția: $x \rightarrow f(x)$, de unde

$f(f(f(x))) = f(f(x)) + f(x)$, ceea ce demonstrează că $P(1)$ este adevărată. (2p)

II. Etapa de demonstrație: $P(n) \rightarrow P(n + 1)$

Presupunem $P(n)$ adevărată și avem:

$P(n + 1): f^{[1]} + f^{[2]} + \dots + f^{[n]} + f^{[n+1]} = f^{[n+3]} - f^{[2]}, n \in \mathbb{N}^*.$

Dar, din ipoteza de inducție

$f^{[1]} + f^{[2]} + \dots + f^{[n]} + f^{[n+1]} = f^{[n+2]} - f^{[2]} + f^{[n+1]},$

astfel că ne rămâne să demonstrăm relația:

$f^{[n+3]} - f^{[2]} = f^{[n+2]} - f^{[2]} + f^{[n+1]} \Leftrightarrow f^{[n+3]} = f^{[n+2]} + f^{[n+1]},$

ceea ce se obține făcând substituția $x \rightarrow f^{[n+1]}$ în relația din enunț, astfel $P(n + 1)$ este adevărată. Prin urmare, conform principiul inducției matematice

$f^{[1]} + f^{[2]} + \dots + f^{[n]} = f^{[n+2]} - f^{[2]}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$ (2p)

3. a) Cum $e^{-x} > 0$, rezultă $\arctge^{-x} = \operatorname{arcctge}^x$. Ecuația devine: $2e^x = 2 \Leftrightarrow x = 0$. (3p)

b) Condiția de existență $x > 0$. Folosind formula $a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^{\lg 5} = 5^{\lg x}$, ecuația se mai scrie: $5^{\lg x} + 12^{\lg x} = 13^{\lg x}$. (2p)

Notând $\lg x = y \Rightarrow$

$5^y + 12^y = 13^y \Rightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^y + \left(\frac{12}{13}\right)^y = 1 \Rightarrow y = 2$ soluție unică deoarece funcția:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(y) = \left(\frac{5}{13}\right)^y + \left(\frac{12}{13}\right)^y$ este strict descrescătoare. Deci $\lg x = 2 \Rightarrow x = 100$. (2p)

4. Dacă $m \leq 1$, atunci:

$a + mb + c \leq a + b + c, b + mc + a \leq a + b + c, c + ma + b \leq a + b + c$ și avem

$\sum \frac{a}{a+mb+c} \geq \sum \frac{a}{a+b+c} = 1$ (1). (2p)

Dacă $m > 1$, notăm cu $x = a + mb + c, y = b + mc + a, z = c + ma + b$ și

$$S = \sum ax.$$

Varianta I.

Folosind inegalitatea: $\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \frac{x_3^2}{a_3} \geq \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{a_1 + a_2 + a_3}$, $(\forall) x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, $a_1, a_2, a_3 > 0$,

obținem:

$$\sum \frac{a}{x} = \sum \frac{a^2}{ax} \geq \frac{(\sum a)^2}{S} = \frac{(\sum a)^2}{\sum a^2 + (m+1) \sum ab}.$$

Varianta II.

Din convexitatea funcției x^2 rezultă că:

$$\sum \frac{a}{x} = S \cdot \sum \frac{ax}{S} \left(\frac{a}{ax} \right)^2 \geq S \left(\sum \frac{ax}{S} \cdot \frac{a}{ax} \right)^2 = \frac{(\sum a)^2}{S} = \frac{(\sum a)^2}{\sum a^2 + (m+1) \sum ab}. \quad (2p)$$

$$(*) \text{Demonstrăm: } \frac{(\sum a)^2}{\sum a^2 + (m+1) \sum ab} \geq \frac{3}{m+2} \Leftrightarrow$$

$$(m+2) \cdot \left(\sum a \right)^2 \geq 3 \cdot \sum a^2 + 3(m+1) \sum ab \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m+2) \sum a^2 + 2(m+2) \sum ab \geq 3 \cdot \sum a^2 + 3(m+1) \sum ab \Leftrightarrow \quad (2p)$$

$$\Leftrightarrow (m-1)(\sum a^2 - \sum ab) \geq 0 \Leftrightarrow \sum a^2 \geq \sum ab, \text{ care este adevărată,}$$

rezultă că $\sum \frac{a}{x} \geq \frac{3}{m+2}$ (2).

Din (1), (2) se obține concluzia problemei:

$$\frac{a}{a+mb+c} + \frac{b}{b+mc+a} + \frac{c}{c+ma+b} \geq \min \left(1, \frac{3}{m+2} \right), \text{ oricare ar fi } a, b, c > 0. \quad (1p)$$