



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018  
CLASA a V-a  
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.  
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor I. Fota, GM nr 11 / 2017

Fie numărul  $\overline{abcd}$ . Să se arate că, dacă  $11 \cdot \overline{ab} = \overline{cd} + 222$ , atunci numărul  $\overline{abcd}$  se divide cu 37.

| Detalii rezolvare                                                                                              | Barem asociat |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| $\overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd}$ ;                                                         | 1p            |
| $\overline{cd} = 11\overline{ab} - 222 \Rightarrow \overline{abcd} = 100\overline{ab} + 11\overline{ab} - 222$ | 2p            |
| $\Rightarrow \overline{abcd} = 111\overline{ab} - 222 \Rightarrow \overline{abcd} = 111(\overline{ab} - 2)$    | 2p            |
| $37 \mid 111 \Rightarrow 37 \mid \overline{abcd}$                                                              | 2p            |

Enunț subiect 2, autor \*\*\*\*

Determinați ultimele patru cifre ale numărului  $a = 2^{2018} - 2^{2012} - 2^{2011}$ .

| Detalii rezolvare                                                             | Barem asociat |
|-------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| $2^{2018} - 2^{2012} - 2^{2011} = 2^{2011}(2^7 - 2 - 1) = 2^{2011} \cdot 125$ | 2p            |
| $2^{2011} = 2^{2008} \cdot 2^3$                                               | 1p            |
| $2^{2011} \cdot 125 = 2^{2008} \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^{2008} \cdot 10^3$     | 2p            |
| $U(2^{2008}) = 6 \Rightarrow$ ultimele patru cifre sunt 6,0,0,0               | 2p            |

Enunț subiect 3, autor Teodor Cristian Olteanu

Se consideră șirul de numere naturale 3; 8; 13; 18; .....; 2018

a) Să se arate că suma primilor 72 de termeni din șir este pătrat perfect.

b) Să se arate că oricum am extrage 109 de numere din șir, suma acestora nu este pătrat perfect

| Detalii rezolvare                                                                                                              | Barem asociat |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| a) $3=5 \cdot 0+3$ ; $8=5 \cdot 1+3$ ; $13=5 \cdot 2+3$ ; .....; $358=5 \cdot 71+3$ cei 72 de termeni                          | 1p            |
| Suma: $5(1+2+3+\dots+71)+3 \cdot 72=5 \cdot 71 \cdot 36+3 \cdot 72=36(355+6)=36 \cdot 361$                                     | 1p            |
| $36 \cdot 361=6^2 \cdot 19^2=(6 \cdot 19)^2$ pătrat perfect                                                                    | 1p            |
| b) Cele 109 numere pot fi: $5a_1+3$ ; $5a_2+3$ ; $5a_3+3$ ; .....; $5a_{109}+3$                                                | 1p            |
| Suma lor: $5(a_1+a_2+a_3+\dots+a_{109})+3 \cdot 109$                                                                           |               |
| Ultima cifră a numărului $5(a_1+a_2+a_3+\dots+a_{109})$ este 0 sau 5 iar ultima cifră a numărului $3 \cdot 109$ este 7         | 2p            |
| Ultima cifră a numărului $5(a_1+a_2+a_3+\dots+a_{109})+3 \cdot 109$ este 7 sau 2 $\Rightarrow$ suma nu poate fi patrat perfect | 1p            |

Enunț subiect 4, autor Liliana Maria TODERIUC; Gabriel VRÎNCEANU

Notăm în cele ce urmează cu  $A$  un număr oarecare natural și cu  $S(A)$  suma cifrelor numărului natural  $A$  (ex:  $S(132)=1+3+2=6$ )

Dacă numărul  $A$  are proprietatea că  $S(A)=2018$  determinați numărul de valori numere naturale care pot fi rezultate ale diferențelor  $S(A)-S(A+1)$  sau  $S(A+1)-S(A)$ ,

| Detalii rezolvare                                                                                                                                       | Barem asociat |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| Numărul de cazuri este determinat de numărul de cifre consecutive de 9 cu care se finalizează numărul $A$ ,                                             | 2p            |
| la care se adaugă cazul $S(A+1)-S(A)=1$ , corespunzător cifrei unităților diferită de 9                                                                 | 2p            |
| Cum $2018=224 \cdot 9+2$ , rezultă că numărul maxim de cifre de 9 din care poate fi format $A$ este 224,                                                | 2p            |
| în total numărul valorilor diferențelor este 225                                                                                                        | 1p            |
| Observație: diferențele posibile sunt de forma 1 sau $9 \cdot k-1$ , unde $k$ este orice număr natural care îndeplinește condiția $1 \leq k \leq 224$ . |               |



Ministerul  
Educației  
Naționale



SOCIETATEA DE  
ȘTIINȚE MATEMATICE  
DIN ROMÂNIA



INSPECTORATUL ȘCOLAR AL  
MUNICIPIULUI BUCUREȘTI



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018**  
**CLASA a VI-a**  
**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă:** Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor.(\*\*\*)

Se consideră M, A și B trei puncte coliniare în această ordine și punctele C și D aparținând semidreptei [MA astfel încât  $MC = 3 \cdot MA$  și  $MD = 3 \cdot MB$ .

Știind că  $BC = MA$ , să se calculeze valoarea raportului  $\frac{BD}{AB}$ .

| Detalii rezolvare                                                                                    | Barem asociat |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| Notăm $MA = x \Rightarrow MC = 3x$ și $BC = x$                                                       | 1p.           |
| (I) Ordinea punctelor: M, A, B, C, D. $\Rightarrow AC = MC - MA$ , $AC = 2x$                         | 1p.           |
| $AB = AC - BC \Rightarrow AB = 2x - x = x$ , $MB = MA + AB = 2x$ , $MD = 6x$ , $CD = 3x$ , $BD = 4x$ | 1p.           |
| $\frac{BD}{AB} = \frac{4x}{x} = 4$                                                                   | 1p.           |
| (II) Ordinea punctelor: M, A, C, B, D. $\Rightarrow MB = MC + BC = 3x + x = 4x$ ; $MD = 12x$         | 1p.           |
| $BD = MD - MB = 12x - 4x = 8x$ , $AB = MB - MA = 3x$                                                 | 1p.           |
| $\frac{BD}{AB} = \frac{8x}{3x} = \frac{8}{3}$                                                        | 1p.           |

Enunț subiect 2, autor.Cecilia Deaconescu și Radu Deaconescu, Pitești. G.M. Nr.6-7-8/2017.

Se consideră numerele raționale pozitive  $x = \frac{3^{48}+8}{2^{77}+9}$  și  $y = \frac{5^{74}+11}{11^{49}+5}$ .

Arătați că: a)  $y > \frac{11}{5}$ .

b)  $y - x > 1,3(1)$ .

| Detalii rezolvare                                                                                                           | Barem asociat |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| a) $y > \frac{11}{5} \Leftrightarrow \frac{5^{74}+11}{11^{49}+5} > \frac{11}{5} \Leftrightarrow 5^{75} + 55 > 11^{50} + 55$ | 1p.           |
| $5^{75} > 11^{50} \Leftrightarrow (5^3)^{25} > (11^2)^{25} \Leftrightarrow 125^{25} > 121^{25}$                             | 1p.           |
| b) Vom arăta că $x < \frac{8}{9} \Leftrightarrow \frac{3^{48}+8}{2^{77}+9} < \frac{8}{9}$                                   | 1p.           |
| $3^{50} + 72 < 2^{80} + 72 \Leftrightarrow 3^{50} < 2^{80} \Leftrightarrow 243^{10} < 256^{10}$ adevărat.                   | 1p.           |
| $y > \frac{11}{5}$ , $x < \frac{8}{9} \Rightarrow y - x > \frac{11}{5} - \frac{8}{9}$                                       | 1p.           |
| $y - x > \frac{99-40}{45} = \frac{59}{45}$                                                                                  | 1p.           |

$$\frac{59}{45} = 1,3(1) \Rightarrow y - x > 1,3(1)$$

1p.

Enunț subiect 3.\*\*\*

Aflați câte numere naturale  $n$  de 3 cifre au proprietatea că  $(n, 91)$  este un număr prim, unde  $(n, 91)$  este cel mai mare divizor comun al numerelor  $n$  și 91.

| Detalii rezolvare                                                                                                   | Barem asociat |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| $91=7 \cdot 13$ ; $7, 13 = \text{nr. prime.}$ $(n, 91) = \text{nr. prim} \mid 91 \Rightarrow (n, 91) \in \{7, 13\}$ | 1p.           |
| (I) $(n, 91)=7 \Rightarrow n$ este multiplu de 7 și nu este multiplu de 91.                                         | 1p.           |
| Avem 128 de multipli ai lui 7 de trei cifre.                                                                        | 1p.           |
| Avem 9 multipli ai lui 91 de trei cifre și deci $128 - 9 = 119$ nr. de trei cifre cu $(n, 91) = 7$ .                | 1p.           |
| (II) $(n, 91)=13 \Rightarrow n$ este multiplu de 13 și nu este multiplu de 91.                                      | 1p.           |
| Avem 69 de multipli de 13 de trei cifre și deci $69 - 9 = 60$ nr. de trei cifre cu $(n, 91) = 13$ .                 | 1p.           |
| În total avem $119 + 60 = 179$ numere.                                                                              | 1p.           |

Enunț subiect 4, autor.Traian Preda, București.

**Determinați cel mai mic număr natural de patru cifre distincte care are proprietatea că suma dintre el și răsturnatul său este un număr natural divizibil cu 230.**

| Detalii rezolvare                                                                                               | Barem asociat |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| $n=1001(a+d) + 110(b+c)$                                                                                        | 1p.           |
| $230 \mid n \Rightarrow 10 \mid n \Rightarrow 10 \mid 1001(a+d) \Rightarrow 10 \mid (a+d) \Rightarrow a+d = 10$ | 1p.           |
| $230 \mid 10010+110(b+c) \Rightarrow 23 \mid 1001+11(b+c) \Rightarrow$                                          | 1p.           |
| $23 \mid 11(91+b+c) ; (23, 11)=1 \Rightarrow 23 \mid (91+b+c) \Rightarrow$                                      | 1p.           |
| $23 \mid (91+b+c); 23 \mid 92 \Rightarrow 23 \mid (b+c-1) \Rightarrow$                                          | 1p.           |
| $b+c=1 \Rightarrow \{b, c\} = \{0, 1\}$                                                                         | 1p.           |
| Cifrele sunt distincte $\Rightarrow a$ este diferit de 1 $\Rightarrow$ cel mai mic $n=2018$ .                   | 1p.           |



Ministerul  
Educației  
Naționale



SOCIETATEA DE  
ȘTIINȚE MATEMATICE  
DIN ROMÂNIA



INSPECTORATUL ȘCOLAR AL  
MUNICIPIULUI BUCUREȘTI



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018  
CLASA a VII-a  
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor Dana Radu.

Fie  $a = 2018^{2018}$ ,  $b = 2016^{2018}$ ,  $c = 2018^{2016}$ ,  $d = 2016^{2016}$ . Justificați dacă numerele următoare sunt raționale sau iraționale :

a)  $x = \sqrt{a+b+c+d}$

b)  $y = \sqrt{a+c}$

c)  $z = \sqrt{a+b+c}$

| Detalii rezolvare                                                                       | Barem asociat |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| a) Ultima cifra a sumei $a+b+c+d$ este $U(4+6+6+6)=2$                                   | 1             |
| Finalizare                                                                              | 1             |
| b) $2018^{2018} + 2018^{2016} = 2018^{2016}(1+2018^2)$ ; $2018^2 < 1 + 2018^2 < 2019^2$ | 1             |
| Finalizare                                                                              | 1             |
| c) $b = M_7$ ; $c = M_7+1$                                                              | 1             |
| $a = M_7+2^{2018} = M_7+8^{672} \cdot 4 = M_7+4$ ; $a+b+c = M_7+5$                      | 1             |
| Restul împărțirii unui pătrat perfect la 7 este 0, 1, 2 sau 4; Finalizare               | 1             |

Enunț subiect 2, autor \*\*\*

Fie  $a, b, c$  numere raționale.

- a) Arătați că dacă  $a \cdot b$  și  $a + b$  sunt numere întregi, atunci  $a$  și  $b$  sunt numere întregi.  
b) Arătați că dacă  $a \cdot b$ ,  $b \cdot c$ ,  $a \cdot c$ ,  $a + b + c$  sunt simultan numere întregi, atunci  $a$ ,  $b$  și  $c$  sunt numere întregi.

| Detalii rezolvare                                                                                                                    | Barem asociat |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| a) Fie $a = \frac{x}{y}$ , $(x, y) = 1$ unde $x, y \in \mathbb{Z}$ și $a \cdot b = k$ , $k \in \mathbb{Z}$                           | 2             |
| $a + b = \frac{x}{y} + \frac{ky}{x} = \frac{x^2 + ky^2}{xy} = t$ , $t \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 + ky^2 = txy \Rightarrow y x^2$ |               |
| Din $y x^2$ și $(x, y) = 1 \Rightarrow y x$ . Finalizare                                                                             | 1             |
| b) Din $a \cdot b$ și $a \cdot c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \cdot (b + c) \in \mathbb{Z}$                                          | 2             |
| Din $a \cdot (b + c)$ și $a + (b + c)$ , aplicând subpunctul a) rezultă că $a \in \mathbb{Z}$ și $(b + c) \in \mathbb{Z}$            | 1             |
| Din $b \cdot c$ și $(b + c) \in \mathbb{Z}$ , aplicând subpunctul a) rezultă că $b, c \in \mathbb{Z}$                                | 1             |

Enunț subiect 3, autor Dana Radu

Fie  $ABCD$  un paralelogram de centru  $O$  și  $M \in (AC)$ , astfel încât  $AM$  este o treime din  $MC$ . Paralela prin  $M$  la  $BD$ , intersectează pe  $BC$  în  $E$  și pe  $CD$  în  $F$ . Să se arate că dacă  $FC = 3EO$ , atunci triunghiul  $ADB$  este dreptunghic.

| Detalii rezolvare                                                                                                                                                                                                                | Barem asociat |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| $O$ centrul paralelogramului $ABCD \Rightarrow O$ mijlocul lui $(BD)$ și cum $AM$ este o treime din $MC$ rezultă că $M$ este mijlocul lui $(AO)$ (1)                                                                             | 1             |
| Fie $E_1$ și $F_1$ intersecțiile dreptelor $AB$ și $AD$ cu $FE$ . Din (1) și $ME_1 // OB \Rightarrow E_1$ mijlocul lui $AB$ și $2ME_1 = OB$ (2)                                                                                  | 1             |
| Analog $F_1$ mijlocul lui $AD$ și $2MF_1 = OD$ (3); Din (2), (3) și $OB = OD \Rightarrow ME_1 = MF_1$ (3)                                                                                                                        | 1             |
| Din paralelogramele $FE_1BD$ și $DBEF_1 \Rightarrow BE_1 = DF$ și $DF_1 = BE \Rightarrow \triangle BEE_1 \equiv \triangle DFF_1$ (L.U.L) $\Rightarrow FF_1 = EE_1$ (4). Din (3) și (4) $\Rightarrow M$ mijlocul lui $(FE)$ . (4) | 1             |
| Din (4) și $CM = 3MO \Rightarrow O$ este centrul de greutate al triunghiului $FEC$ (5)                                                                                                                                           | 1             |
| Fie $R$ mijlocul lui $(FC)$ și (5) $\Rightarrow EO = \frac{2}{3}ER$ și cum $FC = 3EO \Rightarrow m(\angle E) = 90^\circ$                                                                                                         | 1             |
| În paralelogramul $DBEF_1$ $m(\angle E) = 90^\circ \Rightarrow m(\angle ADB) = 90^\circ$                                                                                                                                         | 1             |

Enunț subiect 4, autor. Gazeta 9/2017

În triunghiul  $ABC$  cu  $AB = AC$  și  $m(\angle A) = 40^\circ$ , considerăm punctul  $D \in (AC)$ , astfel încât  $m(\angle ABD) = 60^\circ$ . Biseectoarea unghiului  $A$  intersectează dreapta  $BD$  în punctul  $E$ , iar punctul  $T$ , aparține biseectoarei unghiului  $A$ , astfel încât  $E \in (AT)$  și  $ET = AB$ . Arătați că patrulaterul  $ABTC$  este romb.

| Detalii rezolvare                                                                                                                                                                                  | Barem asociat |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| Fie $F \in (ET)$ , astfel încât $m(\angle FBC) = 10^\circ$                                                                                                                                         | 1             |
| În $\triangle ABC$ isoscel $m(\angle BAC) = 40^\circ$ , $m(\angle ABC) = 70^\circ$ , $AE$ biseectoarea lui $A \Rightarrow AE \perp BC$                                                             | 1             |
| În $\triangle ABF$ , $m(\angle BAF) = 20^\circ$ , $m(\angle ABF) = 70^\circ + 10^\circ = 80^\circ \Rightarrow \triangle ABF$ isoscel, cu $AB = AF$ (1)                                             | 1             |
| În $\triangle EBF$ , $m(\angle EBF) = m(\angle EBC) = m(\angle CBF) = 10^\circ + 10^\circ = 20^\circ$ și $FE \perp BC \Rightarrow BE = BF$ și $m(\angle BEF) = 80^\circ$                           | 1             |
| Din $AB = ET$ , $BF = BE$ și $m(\angle ABF) = m(\angle BET) = 80^\circ \Rightarrow \triangle ABF \equiv \triangle TEB$ (L.U.L) $\Rightarrow BT = AF$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow AB = BT$ (3) | 1             |
| În $\triangle ABC$ isoscel, $AE$ biseectoarea lui $A \Rightarrow AE$ mediatoarea $(BC)$ , dar $T \in AE \Rightarrow TB = TC$ (4)                                                                   | 1             |
| Din $AB = AC$ , (3) și (4) $\Rightarrow ABTC$ romb                                                                                                                                                 | 1             |



Ministerul  
Educației  
Naționale



SOCIETATEA DE  
ȘTIINȚE MATEMATICE  
DIN ROMÂNIA



INSPECTORATUL ȘCOLAR AL  
MUNICIPIULUI BUCUREȘTI



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
– ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018 –**

**CLASA A VIII-A  
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă:** Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.  
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

**I.** Se consideră numerele  $R$  și  $S$  unde:

$$R = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+1)} \right], \text{ iar}$$

$$S = \left( \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \right). \text{ Arătați că numărul } R-S \text{ este rațional.}$$

| Detalii rezolvare                                                        | Barem asociat |
|--------------------------------------------------------------------------|---------------|
| Notăm $a = \sqrt{2}-1$ , $b = \sqrt{3}+1$ și $c = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ .   | 1p            |
| Atunci $R = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$ , iar $S = \frac{bc+ac-ab}{abc}$ . | 3p            |
| Obținem $R-S = \frac{(a+b-c)^2}{2abc}$ .                                 | 2p            |
| Cum $a+b=c$ , rezultă $R-S \equiv 0 \in \mathbb{Q}$                      | 1p            |

**II. 1)** Determinați toate perechile de numere naturale  $(m, n)$  cu proprietatea

$$m^3 = n^3 + n^2 + 7n + 1.$$

**2)** Demonstrați că, dacă  $a$  este un număr real,  $\frac{1}{3} \leq a \leq 10$ , atunci  $\frac{\sqrt{3}}{28} \leq \frac{\sqrt{a}}{a+9} \leq \frac{1}{6}$ .

Menționați cazurile de egalitate.

| Detalii rezolvare                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Barem asociat |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| 1) Observăm că $m^3 > n^3$ , iar dacă $n \geq 3$ , atunci $(n+1)^3 = m^3 + 2n(n-2) > m^3$ , adică $n^3 < m^3 < (n+1)^3$ și nu avem soluții.<br>Deducem că $n \leq 2$ și obținem perechile $(m, n) \in \{(1, 0), (3, 2)\}$ .                                                                                                                                                                                        | 1p<br>2p      |
| 2) Inegalitatea din dreapta este echivalentă cu $(3-\sqrt{a})^2 \geq 0$ , adevărată oricare ar fi $a \geq \frac{1}{3}$ ,<br>cu egalitate pentru $a = 9$ .<br>După ridicare la pătrat, prima inegalitate este echivalentă cu $3a^2 - 730a + 243 \leq 0$ sau $(3a-1)(a-243) \leq 0$ .<br>Deoarece $3a-1 \geq 0$ și $a-243 < 0$ ultima inegalitate este adevărată.<br>Egalitatea se obține pentru $a = \frac{1}{3}$ . | 2p<br>2p      |

III. Se consideră un tetraedru regulat cu lungimea muchiei de 2cm. Pe suprafața tetraedrului se consideră, la întâmplare, 9 puncte, în interiorul fețelor.

Arătați că cel puțin două dintre cele 9 puncte se află la o distanță mai mică de 1cm unul față de celălalt.

| Detalii rezolvare                                                                                                                                                                                                                                                                       | Barem asociat |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| Ducând liniile mijlocii pe fețele tetraedrului, obținem $4 \cdot 4 = 16$ triunghiuri echilaterale cu latura de 1cm. Deasemenea, apar patru tetraedre regulate cu muchia de 1cm, fiecare având un vârf comun cu câte un vârf al tetraedrului mare.                                       |               |
| Dacă două din cele 9 puncte sunt situate pe fețele exterioare ale unui tetraedru mic, atunci distanța dintre ele este mai mică de 1cm și problema este rezolvată.                                                                                                                       | 3p            |
| Dacă cel mult unul din cele 9 puncte este situat pe fețele exterioare ale unui tetraedru mic, atunci rămân cel puțin $9 - 4 = 5$ puncte care vor fi situate în interiorul, sau pe laturile celor patru triunghiuri echilaterale centrale (fără vârfuri) de pe fețele tetraedrului mare. | 2p            |
| Conform principiului cutiei vor exista două puncte care sunt situate în interiorul sau pe laturile unuia dintre triunghiurile centrale (fără vârfuri) de pe o față a tetraedrului mare. Distanța dintre aceste două puncte este mai mică de 1cm.                                        | 2p            |

IV. În planul  $\beta$  se consideră un patrulater convex oarecare,  $ABCD$ , care nu este paralelogram.

Punctul  $V$  nu este situat în planul  $\beta$ . Un plan  $\alpha$  intersectează interioarele segmentelor

$VA, VB, VC$  și  $VD$  în punctele  $M, N, P$ , respectiv  $Q$  astfel încât  $\frac{MA}{MV} = m, \frac{NB}{NV} = n,$

$\frac{PC}{PV} = p$  și  $\frac{QD}{QV} = q.$

Știind că  $m + p = n + q = k, m \neq p, n \neq q$ , arătați că planul  $\alpha$  intersectează planul  $\beta$  după o dreaptă paralelă cu dreapta determinată de mijloacele diagonalelor patrulaterului  $ABCD$ .

Cecilia Deaconescu & Radu Deaconescu, Pitești, G.M.B. nr.6-7-8/2017

| Detalii rezolvare                                                                                                                                                     | Barem asociat |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| Notăm $m + p = n + q = k$ , $R$ mijlocul diagonalei $BD$ , $VR \cap QN = \{E\}$ , $S$ mijlocul diagonalei $AC$ , $VS \cap MP = \{F\}$ .                               |               |
| Considerăm triunghiul $VDB$ .                                                                                                                                         |               |
| Paralelele la dreapta $VR$ duse prin $D$ și respectiv $B$ intersectează dreapta $QN$ în $X$ , respectiv $Y$ .                                                         |               |
| Din asemănarea triunghiurilor $DXQ$ și $VEQ$ obținem $p = \frac{DD}{QV} = \frac{XD}{VE}$ , iar, din asemănarea                                                        |               |
| triunghiurilor $BYN$ și $VEN$ , obținem $n = \frac{NB}{NV} = \frac{BY}{VE}$ .                                                                                         |               |
| Atunci $k = n + p = \frac{XD + BY}{VE}$ .                                                                                                                             |               |
| Cum segmentul $RE$ este linie mijlocie în trapezul $BDXY$ , obținem $\frac{ER}{EV} = \frac{k}{2}$ .                                                                   | 3p            |
| Raționând analog în triunghiul $VAC$ , obținem $\frac{ES}{EV} = \frac{k}{2}$ .                                                                                        | 2p            |
| În concluzie, din <i>reciproca teoremei lui Thales</i> aplicată în triunghiul $VRS$ , obținem $EF \parallel RS$ . ( $R \neq S$ deoarece $ABCD$ nu este paralelogram.) |               |
| Deoarece $m \neq p, n \neq q$ , rezultă că $MP \cap AC \neq \emptyset$ și $NQ \cap BD \neq \emptyset$ , deci $\alpha \cap \beta = d$ .                                |               |
| Cum $EF \subset \alpha, RS \subset \beta$ , rezultă că $EF \parallel d \parallel RS$ .                                                                                | 2p            |