Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Iaşi
14.02.2014

CLASA a IX-a

Problema 1.

Fie ABC un triunghi şi punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{PB}$ şi Q mijlocul segmentului (PM).

a) Arătați că $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ şi $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{8}\overrightarrow{BA}$;

b) Demonstrați că punctele B, Q, N sunt coliniare şi calculați valoarea raportului $\frac{BQ}{QN}$.

Problema 2.

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu primul termen a_1 şi rația r. Calculați:

a) $S_1=\sum_{k=1}^{n}a_k^2$

b) $S_2=\sum_{k=1}^{n}a_k a_{k+1}$

c) $S_3=\sum_{1\leq k<i\leq n}a_k a_i$

Problema 3.

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\left[\frac{1}{10-x}\right]=\frac{1}{10-[x]}$

Problema 4.

a) Determinați $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{N}^*$, $a_1<a_2<a_3$ astfel încât $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=1$

b) Arătați că $\forall n\geq 3, n\in\mathbb{N}$, există $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{N}^*$, $a_1<a_2<...<a_n$ astfel încât

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}=1$.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Str. N. Bălcescu nr. 26, 700117, Iași
Tel: +40 (0)232 26 80 14
Fax: +40 (0)232 26 77 05
www.isjiasi.ro