OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019
CLASA a XI-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1, autori Ana-Maria si Daniel Petriceanu

Considerăm șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = \sqrt[3]{2019 + \frac{1}{x_n^3}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este șir convergent și calculați limita sa.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Din ipoteză avem $x_{n+1}^3 = 2019 + \frac{1}{x_n^3}$ Notăm l_1, l_2 soluțiile ecuației $l^2 - 2019l - 1 = 0$ și $z_n = \frac{x_n^3 - l_1}{x_n^3 - l_2}$, unde $l_2 < l_1$	2p
$z_{n+1} = \frac{x_{n+1}^3 - l_1}{x_{n+1}^3 - l_2} = \frac{2019 + \frac{1}{x_n^3} - l_1}{2019 + \frac{1}{x_n^3} - l_2} = \frac{x_n^3(2019 - l_1) + 1}{x_n^3(2019 - l_2) + 1} = \frac{x_n^3 - l_1}{x_n^3 - l_2} \cdot \frac{l_2}{l_1} = \frac{l_2}{l_1} z_n$	2p
Rezultă că $(z_n)_n$ este progresie geometrică de rație $\frac{l_2}{l_1}$. Avem $z_n = z_1 \cdot \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{n-1}$ Deoarece $\lvert l_2\rvert < l_1$, atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.	2p
Obținem că există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^3 = l_1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{l_1} = \sqrt[3]{\frac{2019+\sqrt{2019^2+4}}{2}}$, deci șirul este convergent	1p

Observatie. Demonstratia se poate face cu ajutorul subsirurilor convergente.

Enunţ subiect 2, autor Marian Ursarescu (Gazeta Matematica)

2. **Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $det(A^2 + 2A + 2I_2) = 0$. Demonstrați că $det(A) + tr(A) = 0$.**

Detalii rezolvare	Barem asociat
Din ipoteză avem $det(I_2 + (A + I_2)^2) = 0$ Fie $P(x) = det\big(I_2 + x(A + I_2)\big)$	2p

Ultima egalitate se poate scrie $det\left(\left(I_2+i(A+I_2)\right)\left(I_2-i(A+I_2)\right)\right)=0 \Leftrightarrow$ $\det\left(I_2+i(A+I_2)\right)=0$ sau $det\left(I_2-i(A+I_2)\right)=0$.	2p
Rezultă $P(x)=det(I_2)+\alpha x+det(A+I_2)x^2=1+\alpha x+\det(A+I_2)\,x^2$, unde $\alpha, det(A+I_2)\in\mathbb{R}$	1p
Deoarece $P(i)=0$ sau $P(-i)=0$, atunci $\alpha=1-det(A+I_2)=0$. Rezultă $det(A+I_2)=1$	1p
Așadar $1+det(A)+tr(A)=1$, deci $det(A)+tr(A)=0$.	1p

Enunţ subiect 3, autor Flavian Georgescu

a) Există $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, cu proprietatea $det(A)=det(B)=0$, care verifică egalitatea

$\boldsymbol{A^{2019}-B^{2019}=I_2}$?

b) Fie $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $det(A)=det(B)=0$. Demonstrați că

$\boldsymbol{A^{2018}-B^{2018}\neq I_2}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$ verifică cerintele .	1p
b) Din Teorema Hamilton- Cayley avem: $A^2=Tr(A)A$ și $B^2=Tr(B)B$.	2p
Rezultă $A^{2018}=Tr^{2017}(A)A$ și $B^{2018}=Tr^{2017}(B)B$.	2p
Presupunem că $A^{2018}-B^{2018}=I_2 \Rightarrow \mathrm{Tr}^{2017}(A)A-\mathrm{Tr}^{2017}(B)B=I_2$	1p
Aplicăm urma ambilor membri avem $Tr^{2018}(A)-Tr^{2018}(B)=2$, care este falsă deoarece $Tr(A),Tr(B)\in\mathbb{Z}$.	1p

Enunţ subiect 4, autori Ana-Maria si Daniel Petriceanu

Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $definit\ prin\ x_n=\prod_{k=1}^{n}cosk$ este convergent.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Avem $\frac{\pi}{2}+2n\pi-\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi\right)=\frac{\pi}{3}>1$, atunci există $k_n\in\mathbb{N}$ astfel încât $\frac{\pi}{6}+2n\pi<k_n<\frac{\pi}{2}+2n\pi$. Șirul $(k_n)_n$ este strict crescător.	2p
Rezultă $0<cos\,k_n<\frac{\sqrt{3}}{2}$.	1p
$\|x_n\|=\left\|\prod_{j=1}^{n}\cos j\right\|\le\prod_{j\in A_n}\left\|\cos k_j\right\|\le\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\|A_n\|}$ unde $A_n=\{j\in\overline{1,n} \mid k_j\le n\}$	2p
$\lim\limits_{n\to\infty}\|A_n\|=\infty$	1p
De aici deducem că există $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, iar șirul $(x_n)_n$ este convergent.	1p

Observatie. O altă variantă de soluție folosește Lema Kronecker.