

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 16 februarie 2020
Clasa a VIII-a

Barem de corectare

SUBIECTUL 1

1. (1p) Arătați că $a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$, $\forall a \in \mathbb{R}$

2. Fie $E(x) = \left(\frac{2x+1}{2x+3} + \frac{1-2x}{3-2x} - \frac{8x+8}{9-4x^2} \right) : \left(\frac{4x^3-4x^2-9x+9}{4x^3-4} \right)^{-1}$, $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1 \right\}$.

a) (4p) Să se arate că $E(x) < 2$, $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1 \right\}$;

b) (2p) Să se afle valorile reale ale lui x pentru care $E(x)$ este număr întreg.

Soluție

$$(a-1)(a^2+a+1) = a^3 - 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$E(x) = \frac{8x^2+8x+2}{4x^2+4x+4} \dots\dots\dots 3p$$

$$E(x) < 2 \dots\dots\dots 1p$$

$$E(x) = 2 - \frac{6}{(2x+1)^2+3} \Rightarrow E(x) \geq 0; E(x) < 2; E(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow E(x) = 0 \text{ sau } E(x) = 1 \dots\dots 1p$$

$$x \in \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}-1}{2} \right\} \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL 2

(7p) Se consideră mulțimile: $A = \{2, 3, 5, 8, 16, 240\}$ și $B = \{2, 3\}$. Să se arate că $B \subset A$.

Solutie

$$n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1) \dots\dots\dots 1p$$

$$n \cdot (n-1) : 2 \Rightarrow 2 \in A; (n-1) \cdot n \cdot (n+1) : 3 \Rightarrow 3 \in A \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Cum } n=2k+1, \text{ avem } 8k(k+1)(2k+1)(2k^2+2k+1) : 16 \Rightarrow 16 \in A \Rightarrow 8 \in A \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Pentru } k \in \{5p; 5p+1; \dots, 5p+4\} \text{ avem } 8k(k+1)(2k+1)(2k^2+2k+1) : 5 \Rightarrow 5 \in A \dots\dots\dots 2p$$

$$240 = 16 \cdot 5 \cdot 3 \Rightarrow 240 \in A \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL 3

Prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are baza pătratul $ABCD$ de latură 6 cm. Punctele P și Q sunt situate pe muchiile BB' și CC' așa încât suma lungimilor segmentelor AP , PQ și $D'Q$ să fie minimă, iar AP să fie bisectoarea unghiului $B'AB$.

a) (4p) Să se afle înălțimea prisme;

b) (3p) Dacă dreapta CC' intersectează planul (APD') în punctul S , să se afle lungimea segmentului $[SQ]$.

Solutie

a) Punctele A, P, Q, D' sunt coliniare în desfasurarea plană a suprafeței laterale....1p

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BP}{DD'} = \frac{1}{3}; \frac{BP}{PB'} = \frac{AB}{AB'} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 2p$$

$$AB' = 12; AA' = 6\sqrt{3} \dots\dots\dots 1p$$

b) $AC \cap BD = \{O\}; AS \cap PD' = \{T\}; (ACS) \cap (BD'D') = OT; DD' \parallel CS \Rightarrow$

$DD' \parallel OT$ și $CS \parallel OT$ 1p

OT este linie mijlocie în trapezul $BD'DP$ și OT este linie mijlocie în ΔACS 1p

$CS=2\sqrt{3}+6\sqrt{3}$; $QS=4\sqrt{3}$ 1p

SUBIECTUL 4

Se consideră punctele necoplanare A, B, C și D așa încât $AB=AC=9$ cm, $BD=CD=5$ cm, $BC=6$ cm și $AD=8$ cm.

- (5p) Să se afle distanța de la punctul D la planul (ABC) ;
- (2p) Să se afle lungimea segmentului $[DM]$ știind că dreapta DM este perpendiculară pe planul (ABC) și că distanțele de la punctul M la planele (ABC) și (DBC) sunt egale.

Soluție

a) Fie P mijloc $[BC]$, $BC \perp AP$, $BC \perp DP$, $AP \cap DP = \{P\} \Rightarrow BC \perp (DAP)$, $BC \subset (ABC) \Rightarrow$

$(ABC) \perp (DAP)$ 1p

Fie $DT \perp AP$, $T \in AP$; $(ABC) \perp (DAP)$; $(ABC) \cap (DAP) = AP \Rightarrow DT \perp (ABC)$ 1p

$DP=4$; $AP=6\sqrt{2}$

.....1p

$TP=\sqrt{2}$; $DT=\sqrt{14}$ (în triunghiul oarecare

DAP)2p

b) $M \in DT$; Fie $MN \perp DP$, $N \in DP$; $BC \perp (ADP)$; $MN \subset (ADP) \Rightarrow BC \perp MN$;

$MN \perp DP$, $MN \perp BC$, $BC \cap DP = \{P\} \Rightarrow MN \perp (DBC)$; $MT \perp (ABC)$; $MN=MT$ 1p

$$\Delta DNM \sim \Delta DTP \Rightarrow \frac{MN}{PT} = \frac{DM}{DP}; \frac{\sqrt{14}-DM}{\sqrt{2}} = \frac{DM}{4};$$

