

12

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa locală, 11 februarie 2023**  
**Clasa a XII– a**

**SUBIECTE:**

**1. a)** Fie  $a \in \mathbf{R}^*$ ,  $b \in \mathbf{R}$  și legea de compoziție  $\circ: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $x \circ y = a(x-b)(y-b) + b$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbf{R}$ . Fie șirul  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ , unde  $x_n$  este soluția ecuației  $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = a^p + b$ , unde  $p \in \mathbf{N}$ ,  $p$  este fixat și  $n \in \mathbf{N}^*$ . Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . **(3p)**

**b)** Fie funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow G$ ,  $f(x) = \frac{x-a}{x+b}$ , unde  $a, b \in (0, \infty)$ . Să se determine mulțimea  $G$  și legea de compoziție  $\Delta: G \times G \rightarrow G$  astfel încât grupurile  $(\mathbf{R}_+^*, \cdot)$  și  $(G, \Delta)$  sunt izomorfe. **(4p)**

**2.** Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $a, b \in G$  astfel încât  $a^3b = ba$  și  $b^2 = e$ , unde  $e \in G$  este elementul neutru al grupului. Să se arate că  $a^8 = e$  și  $(a^2b)^2 = e$ . **(7p)**

**3.** Calculați:  $\int x(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})$ ,  $x(-a, a)$ , unde  $a > 0$ . **(7p)**

**4.** Pentru fiecare  $n \in \mathbf{N}^*$ , fie  $f_n: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{x^{2n-1} + x^{n-1}}{x^{2n} + x^{n+1}}$ .

**a)** Determinați primitiva funcției  $f_1$  care se anulează în 0. **(3p)**

**b)** Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \int_{\frac{n}{\sqrt{n}}}^{\sqrt[n]{n+1}} f_n(x) dx$$

**(4p)**

**Notă:**

*Toate subiectele sunt obligatorii.*

*Fiecare subiect este notat cu punctaj întreg, 0-7 puncte.*

*Fiecare subiect se va redacta pe câte o foaie separată.*

*Timp de lucru: 3ore.*