OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2013
Clasa a XI-a

Subiecte:

1. Se consideră $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $det(A^2 + I_2) = 0$. Arătați că $A^2 = -I_2$.

2. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $\det A = d < 0$.

   a) Să se calculeze $det(A^{-1})$ și $det(A^*)$
   b) Să se arate că nu există matricele $X, Y, Z \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $XY = YZ = ZX = A$.

3. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ *și* $a_1, a_2, \dots \dots .., a_n \in \mathbb{R}^*$.
   a) Să se calculeze:
   $$\lim_{x \to 0} \frac{\left(tg(a_1 x) + \dots \dots . + tg(a_n x)\right)^2}{x\left(tg(a_1^2 x) + \dots \dots . + tg(a_n^2 x)\right)}$$
   b) Să se arate că dacă b_n este rezultatul limitei de la punctul a) și $b_n \geq n$, atunci $a_1 = a_2 = \dots \dots .. = a_n$.

Traian Ianculescu, Zimnicea, Teleorman

4. Considerăm șirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq 2}$ $(a_n)_{n\geq 2}$, $(b_n)_{n\geq 2}$, $(c_n)_{n\geq 2}$, $(d_n)_{n\geq 2}$, cu termenii generali definiți astfel:
   $$x_n = \left(n + \frac{n}{n-1}\right)$$
   $a_n = x_2 x_3 \dots x_n$, $b_n = a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, $c_n = \frac{b_n}{(n+1)!}$, $d_n = (c_n)^{(n+1)!}$

   Să se calculeze limitele șirurilor $(c_n)_{n\geq 2}$ și $(d_n)_{n\geq 2}$.

Mihai Bodan, Cosmeşti, Teleorman

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.